医学部専門予備校 YMS × 医学部進学予備校 メビオ

解答速報

関西医科大学（前期） 数学

2020年 1月25日実施

I　(1)〜(3) の $\boxed{}$ の中に，あてはまる数，角度，整式，不等式，記号，語句などを記入せよ。

(1)　$x = \dfrac{34}{\sqrt{59}-5}$，$y = \dfrac{-34}{\sqrt{59}+5}$ のとき，次の式の値を求めよ。

$x - y = \boxed{\text{ア}}$,

$x^2 + y^2 = \boxed{\text{イ}}$,

$x^3 + y^3 = \boxed{\text{ウ}}$,

$x^3y + 5x^2y^2 + xy^3 = \boxed{\text{エ}}$

(2)　x の方程式 $\log_4(2x^2) - \log_x 4 + \dfrac{1}{2} = 0$ を満たす x の値をすべて求めると $\boxed{\text{オ}}$ である。

(3)　x を実数，a を整数として，集合 A, B, C をそれぞれ次のように定める。

$$A = \{x \mid (x+3)(x-2) \geqq 0\},\ B = \left\{x \mid \left|x - \frac{7}{2}\right| \geqq 4\right\},\ C = \{x \mid |x| \leqq a\}$$

このとき，$\overline{A \cup B}$ を満たす x の範囲は $\boxed{\text{カ}}$ である。また，$\overline{B}$ が C の部分集合となるための a の最小の値は $\boxed{\text{キ}}$ である。

解答

(1)　ア．$2\sqrt{59}$　イ．168　ウ．2020　エ．68

(2)　オ．$\dfrac{1}{4}$，2

(3)　カ．$-\dfrac{1}{2} < x < 2$　キ．8

解説

(1)　まず $x = \dfrac{34}{\sqrt{59}-5} = \sqrt{59}+5$,

$y = \dfrac{-34}{\sqrt{59}+5} = -\sqrt{59}+5$ である．これより $x - y = \mathbf{2\sqrt{59}}$.

また $x + y = 10$, $xy = 25 - 59 = -34$ もわかるので，$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 100 + 68 = \mathbf{168}$.

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 10(168+34) = \mathbf{2020}$.

$x^3y + 5x^2y^2 + xy^3 = xy(x^2 + 5xy + y^2) = -34(168 - 170) = \mathbf{68}$.

(2)　真数条件，底条件より $x > 0$, $x \fallingdotseq 1$ が必要である．以下この条件で考える．$\log_2 x = X$ とおく．$X \fallingdotseq 0$ である．

$$\log_4(2x^2) - \log_x 4 + \frac{1}{2} = 0$$

$$\iff \frac{\log_2(2x^2)}{\log_2 4} - \frac{\log_2 4}{\log_2 x} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\iff \frac{1+2X}{2} - \frac{2}{X} + \frac{1}{2} = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow\ X(1+2X)-4+X=0\\
&\Longleftrightarrow\ 2X^2+2X-4=0\\
&\Longleftrightarrow\ 2(X+2)(X-1)=0\\
&\Longleftrightarrow\ X=-2,\ 1\\
&\Longleftrightarrow\ x=\boldsymbol{\frac{1}{4},\ 2}
\end{aligned}
$$

(3)　各集合は次のようになっている．

$$
\begin{aligned}
&A=\{x \mid (x+3)(x-2)\geqq 0\}=\{x \mid x\leqq -3,\ 2\leqq x\}\\
&B=\left\{x \mid \left|x-\frac{7}{2}\right|\geqq 4\right\}=\left\{x \mid x\leqq -\frac{1}{2},\ \frac{15}{2}\leqq x\right\}\\
&C=\{x \mid |x|\leqq a\}=\{x \mid -a\leqq x\leqq a\}
\end{aligned}
$$

従って $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

$=\{x \mid -3<x<2\}\cap\left\{x \mid -\frac{1}{2}<x<\frac{15}{2}\right\}$

$=\left\{x \mid \boldsymbol{-\frac{1}{2}<x<2}\right\}$

また

$$
\begin{aligned}
&\overline{B}\subset C\\
\Longleftrightarrow\ &\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2}<x<\frac{15}{2}\right\}\subset\{x \mid -a\leqq x\leqq a\}
\end{aligned}
$$

a は整数であったから，これを満たす最小の a は $\mathbf{8}$ である．

II　xy 平面上に，円 $C : x^2 + y^2 = 2$ と放物線 $D : y = k(1 - x^2)$ がある。ただし k は正の定数とする。以下の設問に答えよ。

(1)　C と D が異なる 4 つの交点をもつための k の条件を $\boxed{\text{ク}}$ に示せ。

以降の設問は k が (1) の条件を満たすものとして解答せよ。

(2)　4 つの交点を，x 座標の小さい方から順に点 P, Q, R, S とし，直線 PQ と直線 RS の交点を T とする。円 C, 放物線 D と点 P, Q, R, S, T を $\boxed{\text{ケ}}$ に図示せよ。

(3)　点 P と点 Q の y 座標の値をそれぞれ y_1, y_2 とすると，$y_1 + y_2 = \boxed{\text{コ}}$，$y_1 y_2 = \boxed{\text{サ}}$ である。

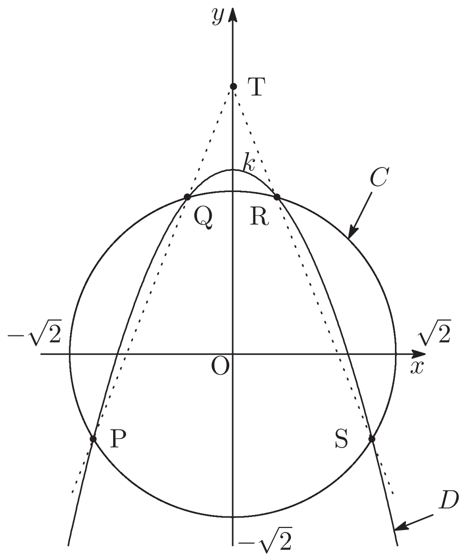
(4)　点 T の y 座標の値を t とするとき，PT · QT の値を t のみを用いて表すと，$\mathrm{PT} \cdot \mathrm{QT} = \boxed{\text{シ}}$ である。

(5)　t を k を用いて表し，$\displaystyle\lim_{k \to \infty} \frac{t}{k}$ を求めよ。(解答を求める過程も記述すること。)

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　ク．$k > \sqrt{2}$

(2)　ケ．



(3)　コ．$\dfrac{1}{k}$，サ．-1

(4)　シ．$t^2 - 2$

(5)　点 P，Q の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とすると，$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{T}(0,\ t)$ であるから，(4) を利用すると

$$\mathrm{PT} \cdot \mathrm{QT} = t^2 - 2$$
$$\iff \sqrt{{x_1}^2 + (t - y_1)^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + (t - y_2)^2} = t^2 - 2$$
$$\iff \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 - 2ty_1 + t^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 - 2ty_2 + t^2} = t^2 - 2$$
$$\iff \sqrt{t^2 - 2ty_1 + 2} \cdot \sqrt{t^2 - 2ty_2 + 2} = t^2 - 2$$

(ここで，${x_1}^2 + {y_1}^2 = 2$，および ${x_2}^2 + {y_2}^2 = 2$ を用いた)

両辺を 2 乗して，(3) で得られた関係式を用いると，

$$(t^2 + 2)^2 - 2(y_1 + y_2)t(t^2 + 2) + 4y_1 y_2 t^2 = (t^2 - 2)^2$$
$$\iff 4t^2 - \frac{2}{k} \cdot t(t^2 + 2) = 0$$

となる．$t>\sqrt{2}$ であるから，両辺を t で割って整理すると，

$$t^2-2kt+2=0$$

となるので，$t=k\pm\sqrt{k^2-2}$ となる．$t>k$ は明らかであるから $t=\boldsymbol{k+\sqrt{k^2-2}}$ であり，このとき

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{t}{k}&=\lim_{k\to\infty}\frac{k+\sqrt{k^2-2}}{k}\\&=\lim_{k\to\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{k^2}}\right)\\&=\mathbf{2}\end{aligned}$$

となる．

解説

(1)　放物線 D は x 切片が 1，-1 で上に凸の放物線であるから題意を満たすためには放物線の頂点の y 座標が $\sqrt{2}$ より大きければよい．したがって，$k>\boldsymbol{\sqrt{2}}$ である．

(2)　上図の通り．

(3)　$y=k(1-x^2)\iff x^2=1-\dfrac{y}{k}$ を $x^2+y^2=2$ に代入して整理すると $ky^2-y-k=0$ となる．この方程式の 2 つの解が y_1，y_2 であるから，解と係数の関係により $y_1+y_2=\boldsymbol{\dfrac{1}{k}}$，$y_1y_2=\mathbf{-1}$ である．

(4)　$\mathrm{U}(0,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{V}(0,\ -\sqrt{2})$ とすると，方べきの定理により

$$\mathrm{PT}\cdot\mathrm{QT}=\mathrm{VT}\cdot\mathrm{UT}=(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})=\boldsymbol{t^2-2}$$

である．

(5)　別解 1

$\mathrm{P}(x_1,\ k(1-{x_1}^2))$，$\mathrm{Q}(x_2,\ k(1-{x_2}^2))$ とおくと，直線 PQ の方程式は

$$\begin{aligned}y&=\frac{k(1-{x_2}^2)-k(1-{x_1}^2)}{x_2-x_1}(x-x_1)+k(1-{x_1}^2)\\&=-k(x_1+x_2)(x-x_1)+k(1-{x_1}^2)\\&=-k(x_1+x_2)x+k(1+x_1x_2)\end{aligned}$$

となるので，

$$t=k(1+x_1x_2)$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}{x_1}^2{x_2}^2&=\left(1-\frac{y_1}{k}\right)\left(1-\frac{y_2}{k}\right)\\&=1-\frac{y_1+y_2}{k}+\frac{y_1y_2}{k^2}\\&=1-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}\\&=1-\frac{2}{k^2}\end{aligned}$$

となるが，明らかに $x_1x_2>0$ なので，

$$t=k\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{k^2}}\right)=\boldsymbol{k+\sqrt{k^2-2}}$$

である．また，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{t}{k}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{k^2}}\right)=\mathbf{2}$$

である．

$\boxed{\text{別解 2}}$

4 交点を通る図形の方程式は l を実数として

$$\{y-k(1-x^2)\}+l(x^2+y^2-2)=0$$

とおける（ここで，$l\fallingdotseq 0$ と仮定してよい）．これを整理すると

$$(k+l)x^2+l\left(y+\frac{1}{2l}\right)^2=k+2l+\frac{1}{4l}\cdots①$$

となるが，これが x 軸あるいは y 軸に平行でない 2 直線を表すためには $k+2l+\dfrac{1}{4l}=0\cdots②$ かつ $l(k+l)<0$ であることが必要十分である．ここで，$k+l>0$, $l<0$ としても一般性を失わない．このとき ① が表す 2 直線の方程式は

$$\sqrt{k+l}\,x+\sqrt{-l}\left(y+\frac{1}{2l}\right)=0\quad\text{または}\quad\sqrt{k+l}\,x-\sqrt{-l}\left(y+\frac{1}{2l}\right)=0$$

であるから，この 2 直線の y 切片は $-\dfrac{1}{2l}$ である．したがって，$t=-\dfrac{1}{2l}\iff l=-\dfrac{1}{2t}$ であり，これを ② に代入して整理すると $t^2-2kt+2=0$ となる．以下は同様である．

III 「レ」と書かれたカードが 1 枚，「ヘ」と書かれたカードが 1 枚，「イ」と書かれたカードが 2 枚，「ワ」と書かれたカードが 2 枚，合計 6 枚のカードがある。この 6 枚のカードすべてを横一列に無作為に並べるとき，以下の確率を求めよ。なお以下の設問で，「並ぶ部分がある」とは指定された方向に指定のカードがその順に続けて並ぶ部分がある場合を意味し，「並ぶ部分がない」とはそれ以外の場合を意味する。

(1) 左から「レイワ」と並ぶ部分がある確率。

(2) 右から「ヘイワ」と並ぶ部分がない確率。

(3) 左から「レイワ」と並ぶ部分があり，右から「ヘイワ」と並ぶ部分がある確率。

(4) 左から「レイワ」と並ぶ部分があるが，右から「ヘイワ」と並ぶ部分がない確率。

(5) 左から「レイワ」と並ぶ部分がなく，右から「ヘイワ」と並ぶ部分がない確率。

(6) 左から「レイワ」と並ぶ部分があるときに，右から「ヘイワ」と並ぶ部分がある条件付き確率。

$\boxed{\text{解答}}$

同じ文字を区別しないとすると，全ての並べ方の総数は $\dfrac{6!}{2!2!}$ 通りであり，これらはすべて同様に確からしい．

以下，左から「レイワ」と並ぶ部分があるという事象を A，右から「ヘイワ」と並ぶ部分があるという事象を B とおく．

(1) $\boxed{\text{レイワ}}$ をひとかたまりと見なして，$\boxed{\text{レイワ}}\,\boxed{\text{ヘ}}\,\boxed{\text{イ}}\,\boxed{\text{ワ}}$ の 4 つの並べ方を考える．

求める確率は，$P(A) = \dfrac{4!}{\dfrac{6!}{2!2!}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{15}}$ である．

(2) (1) と同様に，$P(B) = \dfrac{2}{15}$ なので，求める確率は，

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \boldsymbol{\dfrac{13}{15}}$ である．

(3) 以下の 2 通りを考える．

① $\boxed{\text{レイワ}}\,\boxed{\text{ワイヘ}}$ の 2 つの並べ方を考えると 2 通り．

② $\boxed{\text{レイワイヘ}}\,\boxed{\text{ワ}}$ の 2 つの並べ方を考えると 2 通り．

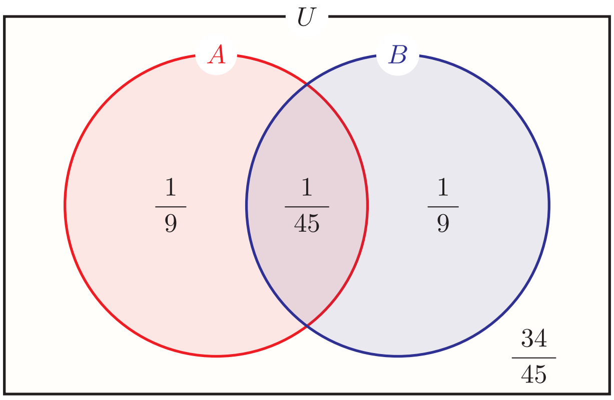
したがって求める確率は，

$P(A \cap B) = \dfrac{2+2}{\dfrac{6!}{2!2!}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{45}}$ である．

(4) $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{2}{15} - \dfrac{1}{45} = \boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

(5) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - \left(\dfrac{2}{15} + \dfrac{2}{15} - \dfrac{1}{45}\right) = \boldsymbol{\dfrac{34}{45}}$

(6) $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\dfrac{1}{45}}{\dfrac{2}{15}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$



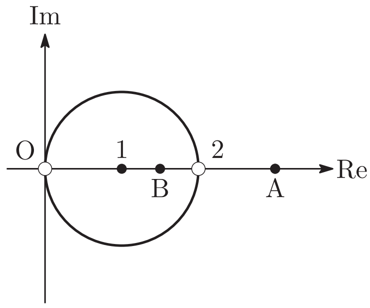
Ⅳ　a は 0 でない実数，β は 0 でない複素数とする。i は虚数単位を表す。以下の設問に答えよ。なお，解答を求める過程も記述すること。

(1)　z を虚数とするとき，複素数平面上で等式 $|z-3|=|2z-3|$ を満たす点 z の全体が表す図形を C とする。C を求め，図示せよ。

(2)　点 z が C 上を動くとき，$w=a+\dfrac{\beta}{z-a}$ と表される複素数 w が，等式 $|w-2|=|w-2i|$ を満たす。a と β の値を求め，点 w が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

解答

(1)　与式は $|z-3|=2\left|z-\dfrac{3}{2}\right|$ となるので，複素数平面上で点 A(3), B$\left(\dfrac{3}{2}\right)$, P$(z)$ をとると，線分比について AP : BP $=2:1$ が成り立つ．ゆえに P(z) の軌跡は，線分 AB を $2:1$ に内分・外分する 2 点すなわち点 2, 0 を直径の両端とする円（アポロニウスの円）となり，その方程式は $\boldsymbol{|z-1|=1}$ である．ただし，z が虚数であることから **点 0 と点 2 は除く**．図示すると下の通りである．



別解

与式の両辺を 2 乗することにより，

$$
\begin{aligned}
&(z-3)(\overline{z}-3)=(2z-3)(2\overline{z}-3)\\
\iff\ & z\overline{z}-3z-3\overline{z}+9=4z\overline{z}-6z-6\overline{z}+9\\
\iff\ & z\overline{z}-z-\overline{z}=0\\
\iff\ & (z-1)(\overline{z}-1)=1\\
\iff\ & |z-1|^2=1\\
\iff\ & |z-1|=1
\end{aligned}
$$

となる．以下同様．

(2)　$|w-2|=|w-2i|\cdots$① とする．これにより w は，点 2 と $2i$ を結ぶ線分の垂直二等分線上の点となる．$w=a+\dfrac{\beta}{z-a}\cdots$② において，$z$ は虚数なので $z-a\neq 0$ である．また $\beta\neq 0$ より $w\neq a$ も分かり，② を z について解くと $z=\dfrac{\beta}{w-a}+a$ となる．

以下，

$$z\neq 0,\ 2 \iff \frac{\beta}{w-a}+a\neq 0,\ 2\cdots③$$

という条件下で考える．

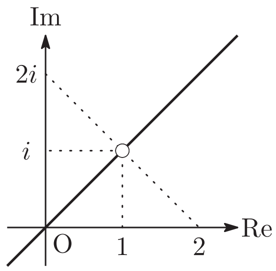
$$
\begin{aligned}
&|z-1|=1\\
\iff\ & \left|\frac{\beta}{w-a}+a-1\right|=1
\end{aligned}
$$

$$\iff \left|\frac{\beta+(a-1)(w-a)}{w-a}\right|=1$$
$$\iff |(a-1)(w-a)+\beta|=|w-a|\cdots④$$

となる．$a=1$ のときは $|w-1|=|\beta|\ (\fallingdotseq 0)$ かつ $w \fallingdotseq 1\pm\beta$ となり，w は点 1 を中心とし半径 $|\beta|$ の円から 2 点 $1\pm\beta$ を除いたものとなるが，「これを満たす w が①を満たす」ことに反する．したがって $a \fallingdotseq 1$ であるから，

$$④ \iff |a-1|\left|w-a+\frac{\beta}{a-1}\right|=|w-a|$$

となる．したがって w の軌跡は③の条件および $\beta \fallingdotseq 0$ の条件下で，$|a-1|=1$ のときは直線となり，$|a-1| \fallingdotseq 1$ のときはアポロニウスの円となる（ただし③に対応する点を除いたもの）．その w が①を満たすには，④が直線になることが必要なので $|a-1|=1$ であり，$a \fallingdotseq 0$ より $a=2$ と決まる．したがって $|w+\beta-2|=|w-2|$ となり，これを満たす w が①を満たすことから $-\beta+2=2i \iff \beta=2-2i$ と決まる．したがって $w=2+\dfrac{2-2i}{z-2}$ であり，$z \fallingdotseq 0$ より $w \fallingdotseq 1+i$，また $z \fallingdotseq 2$ によって除かれる点はない．以上から，$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{\beta=2-2i}$ であり，図示すると下の通りとなる．



講評

Ⅰ［小問集合］（易）全て基本的である．(3) では集合の表し方に慣れていなくても答は集合的に書かなくてもよいので困ることはなかっただろう．

Ⅱ［図形と方程式，極限］（標準〜やや難）円と放物線の交点に関する問題．(1) は x を消去して y の二次方程式に持ち込むとよいが，図からも明らかであろう．(2)(3) は基本的でありすぐに解き終えたい．(4) は円と y 切片の交点で方べきの定理を使えばよい．(5) は $\mathrm{PT}\cdot\mathrm{QT}$ を 2 点間の距離から表すことがポイントだが，計算量が多く，完答するのは困難と思われる．

Ⅲ［確率］（やや易）カードの並べ方の問題．集合の図を書けば難しくない．条件付き確率の定義を覚えておこう．

Ⅳ［複素数平面］（やや難）複素数平面上での点の軌跡についての問題．(1) は基本的であり完答したい．(2) は方針が立たなかった受験生も多いと思われる．厳密な議論が必要なところもあり，完答するのは困難であろう（採点基準にもよる）．

2018 年まではほぼ空所補充，2019 年はすべて記述形式という変遷があったが，2020 年は空所補充と記述形式がほぼ半々になった．難易度は昨年度よりやや易化，分量は多いように見えるが手の付けやすい問題が多く昨年度並である．Ⅰ，Ⅲは完答，Ⅱは (4) まで，Ⅳは (1) までを解ききりたい．目標点は 70%．