解答速報

福岡大学医学部（推薦） 数学

2019年11月24日実施

［I］　次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当欄に記入せよ。

(i)　連立方程式 $\log_3(k+2)<3$，$3\log_k 2+\log_2 k>4$ をみたす整数 k の個数は $\boxed{(\ 1\ )}$ である。

(ii)　平面上の 4 点 O，A，B，C が $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=4$ をみたすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$ の値は $\boxed{(\ 2\ )}$ である。

(iii)　初項 100，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列 $\{a_n\}$ に対して，$b_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\log_{10}a_j$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定められる数列を $\{b_n\}$ とする。このとき，b_n の値が最大となる n は $\boxed{(\ 3\ )}$ である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

(iv)　複素数 z の方程式 $9iz(|z|^2+1)+14(\sqrt{2}+i)=0$ の解は $z=\boxed{(\ 4\ )}$ である。ただし，i は虚数単位とする。

解答

(i) 16 個　(ii) $\dfrac{101\pm16\sqrt{21}}{25}$　(iii) 7　(iv) $-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i$

解説

(i)　k は整数だから，第二式の真数条件 $k>0$，底条件 $k\neq1$ より $k\geqq2$ である．その場合，第一式の真数条件も満たされている．その条件の下で

$$\log_3(k+2)<3 \iff k+2<3^3 \iff k<25$$

また $\log_2 k=x$ とおくと $x\geqq1$ であり，

$$3\log_k 2+\log_2 k>4 \iff \frac{3}{x}+x>4 \iff x^2-4x+3>0 \iff (x-1)(x-3)>0$$
$$\iff 3<x \iff 3<\log_2 k \iff 8<k$$

以上より $8<k<25$ だから $k=9,\ 10,\ \cdots,\ 24$ で **16** 個である．

(ii)　$\angle\mathrm{AOC}=\alpha$，$\angle\mathrm{BOC}=\beta$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi,\ 0\leqq\beta\leqq\pi)$ とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\alpha \quad \text{より} \quad \cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\beta \quad \text{より} \quad \cos\beta=\frac{2}{5},\ \sin\beta=\frac{\sqrt{21}}{5}$$

が分かる．これらより $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ である．従って $\angle\mathrm{AOB}=\beta\pm\alpha$ の 2 種類があり，加法定理から

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{AOB} &= \cos(\beta\pm\alpha)\\ &= \cos\beta\cos\alpha\mp\sin\alpha\sin\beta\\ &= \frac{6\mp4\sqrt{21}}{25}\ (\text{複号同順})\end{aligned}$$

である．△OAB において余弦定理を適用して，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}\\ &= 1+4-2\cdot1\cdot2\cdot\frac{6\pm4\sqrt{21}}{25}\\ &= \frac{101\pm16\sqrt{21}}{25}\end{aligned}$$

であるから

$$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=\frac{101\pm16\sqrt{21}}{25}}$$

である．

別解

座標平面上で考えてもよい．O(0, 0)，C(5, 0) とすると，内積の定義式から A，B の x 座標がそれぞれ $x=\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{4}{5}$ と分かる．$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$ から，A を $\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ とおくと B は $\left(\dfrac{4}{5},\ \pm\dfrac{2\sqrt{21}}{5}\right)$ とおける．これより AB^2 が求まる．

(iii)　まず，$\{a_n\}$ は，初項 100，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから，一般項は $a_n=100\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ である．ここで，

$$b_{n+1}-b_n=\log_{10}a_{n+1}=\log_{10}100\left(\frac{1}{2}\right)^n=2-n\log_{10}2=2-0.3010\times n$$

であるから，

$$\begin{aligned}&n\leqq6 \implies b_{n+1}-b_n>0,\ \text{すなわち}\ b_1<b_2<\cdots<b_6<b_7\\ &n\geqq7 \implies b_{n+1}-b_n<0,\ \text{すなわち}\ b_7>b_8>\cdots\end{aligned}$$

であることがわかる．したがって b_n の値が最大となる n の値は **7** である．

(iv)　$z=x+yi$ ($x,\ y\in\mathbf{R}$) とおくと，

$$9i(x+yi)(x^2+y^2+1)+14(\sqrt{2}+i)=0 \iff -9y(x^2+y^2+1)+14\sqrt{2}+i\{9x(x^2+y^2+1)+14\}=0$$

より，実部・虚部を比較すると

$$\begin{cases}-9y(x^2+y^2+1)+14\sqrt{2}=0 & \cdots① \\ 9x(x^2+y^2+1)+14=0 & \cdots②\end{cases}$$

である．① $\times x+$ ② $\times y$ より，$14\sqrt{2}x+14y=0$．よって，$y=-\sqrt{2}x$．これを ② に代入して，

$$\begin{aligned}&9x(x^2+2x^2+1)+14=0\\ \iff\ &27x^3+9x+14=0\\ \iff\ &(3x+2)(9x^2-6x+7)=0\end{aligned}$$

より，$x = -\dfrac{2}{3}$，$y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．したがって，$\boldsymbol{z = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}i}$ である．

$\boxed{\text{別解}}$

$9iz(|z|^2+1) = -14(\sqrt{2}+i)$ の両辺の絶対値を比較すると，

$$9|z|(|z|^2+1) = 14\sqrt{3}$$

である．$|z| = \dfrac{\sqrt{3}r}{3}$ $(r > 0)$ とおくと，

$$\begin{aligned} 3\sqrt{3}r\left(\frac{r^2}{3}+1\right) &= 14\sqrt{3} \\ \Longleftrightarrow r^3 + 3r - 14 &= 0 \\ \Longleftrightarrow (r-2)(r^2+2r+7) &= 0 \end{aligned}$$

より，$r = 2$ から $|z| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ である．与方程式に代入して，

$$9iz\left(\frac{4}{3}+1\right) + 14(\sqrt{2}+i) = 0 \Longleftrightarrow 21iz = -14(\sqrt{2}+i)$$

となるので，$z = \boldsymbol{\dfrac{2(-1+\sqrt{2}i)}{3}}$ となる．

［**II**］　（記述問題）

r を正の定数とする。点 O を原点とする座標平面上の曲線 $C_1 : y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$，円 $C_2 : x^2 + y^2 = r^2$ が 2 個の共有点 A，B をもち，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r^2$ をみたすとき，次の問に答えよ。

(i)　r^2 の値を求めよ。

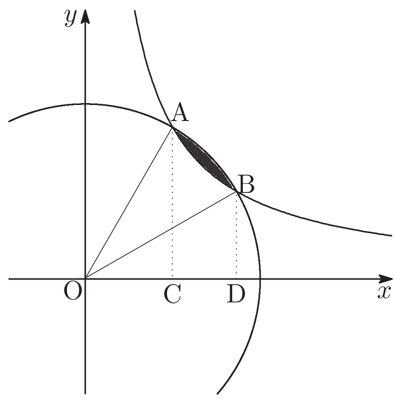
(ii)　曲線 C_1 と円 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta = r^2\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r^2$ より $\cos\theta = \dfrac{\pi}{6}$ が得られる．曲線 C_1，円 C_2 はともに直線 $y = x$ に関して対称な図形であることから，2 交点のうち x 座標が小さい方を A とすると，半直線 OA，OB が x 軸の正の部分となす角の大きさはそれぞれ $\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{6}$ であることがわかる，したがって，A の座標は $\left(r\cos\dfrac{\pi}{3},\ r\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = \left(\dfrac{1}{2}r,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}r\right)$ となり，これが曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ 上の点であることから，$r^2 = \boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$ がわかる.

(2)　直線 $y = x$ に関する対称性により，A $\left(\dfrac{1}{2}r,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}r\right)$，B $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r,\ \dfrac{1}{2}r\right)$ とおける．曲線 C_1 の A から B までの部分と線分 AC，CD，DB で囲まれた部分の面積を S' とおくと，

$$\begin{aligned}
(\text{面積}) &= (\text{扇形 OAB の面積}) + (\text{三角形 OBD の面積}) - (\text{三角形 OAC の面積}) - S' \\
&= (\text{扇形 OAB の面積}) - S' \\
&\qquad (\because \text{三角形 OBD と三角形 OAC の面積は等しい}) \\
&= \frac{1}{12}\pi r^2 - \int_{\frac{1}{2}r}^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{12}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi - \Big[\log x\Big]_{\frac{1}{2}r}^{\frac{\sqrt{3}}{2}r} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{9}\pi - \log\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}r}{\frac{1}{2}r} \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{9}\pi - \frac{1}{2}\log 3}
\end{aligned}$$



講評

［I］［小問集合］

(i)［対数不等式］（やや易）単なる計算問題．ここは落とせない．

(ii)［内積計算］（やや難）抽象的な問題に見えるが，図形の問題として解釈することもできる．答えが 2 つあることに混乱した受験生もいただろう．

(iii)［数列の和］（やや易）b_{n+1} と b_n の差をとることにより，$\{b_n\}$ の増減を調べることができる．よくある設定なので，ここは落としたくない．

(iv)［複素数］（やや難）よほど工夫しないと面倒な計算になる．途中出てくる 3 次方程式の解が整数ではないのでかなり厄介である．

［II］［数Ⅲ微積分］（標準）(i) をしっかり正答できるかどうかだが，多くの受験生には難しいか．ここを突破できれば (ii) は初等幾何を利用するとはいえ，典型問題なので難しくない．

去年も簡単ではなかったが，今年はそれよりも難化したといってよいだろう．比較的解きやすいのが[I]の (i)，(iii) くらいで，残りはすべて標準レベル以上である．計算力を必要とする問題もあり，英語と合わせて 60 分という制限時間を考えるとすべて解ききるのは相当に難しい．[I]の (i)，(iii) をしっかり取ったうえで，[II]の (i) を突破できるかが合否を分けると思われる．目標は 60%．