解答速報

福岡大学医学部　数学

2020年 2月 2日実施

[I]　次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i)　方程式 $2|z-i|=|z+5i|$ をみたす複素数 z 全体を C とおくとき，C は複素数平面上の円を表す。このとき，円 C の中心は $\boxed{(1)}$ である。また，円 C 上の複素数 z の絶対値を r とし，偏角を θ とするとき，r を θ で表すと $r=\boxed{(2)}$ である。
ただし，i は虚数単位とする。

(ii)　n，m を正の整数とする。$20!$ は 2^n で割り切れるが 2^{n+1} で割り切れない。このとき，n の値は $\boxed{(3)}$ である。$(1+2x)^{50}$ の展開式における x^{20} の項の係数は 2^m で割り切れるが 2^{m+1} で割り切れない。このとき，m の値は $\boxed{(4)}$ である。

(iii)　曲線 $y=x^3-3\sqrt{2}x+2\sqrt{2}+1$ を x 軸方向に $\sqrt{2}$ だけ平行移動して得られる曲線の方程式は $\boxed{(5)}$ である。また，3 次方程式 $x^3-3\sqrt{2}x+2\sqrt{2}+1=0$ の実数解は $\boxed{(6)}$ である。

解答

(1) $3i$　(2) $3\sin\theta+\sqrt{9\sin^2\theta+7}$　(3) 18　(4) 23　(5) $y=x^3-3\sqrt{2}x^2+(6-3\sqrt{2})x+7$
(6) $x=-1-\sqrt{2}$

解説

(i)　与えられた方程式は以下のように変形される．

$$
\begin{aligned}
& 2|z-i|=|z+5i| \\
\iff\ & 4|z-i|^2=|z+5i|^2 \\
\iff\ & 4(z-i)(\overline{z}+i)=(z+5i)(\overline{z}-5i) \\
\iff\ & z\overline{z}+3iz-3i\overline{z}-7=0 \\
\iff\ & (z-3i)(\overline{z}+3i)=16 \\
\iff\ & |z-3i|^2=16 \\
\iff\ & |z-3i|=4\cdots①
\end{aligned}
$$

したがって，z 全体の集合は，中心が点 $\boldsymbol{3i}$ であり半径 4 の円となる．

また $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を①に代入すると

$$\begin{aligned} & |r\cos\theta + (r\sin\theta - 3)i| = 4 \\ \iff\ & r^2\cos^2\theta + (r\sin\theta - 3)^2 = 16 \\ \iff\ & r^2 - 6r\sin\theta - 7 = 0 \\ \iff\ & r = 3\sin\theta \pm \sqrt{9\sin^2\theta + 7} \end{aligned}$$

となる．今，$r = |z| > 0$ であり，また

$$3\sin\theta < \sqrt{9\sin^2\theta + 7}$$

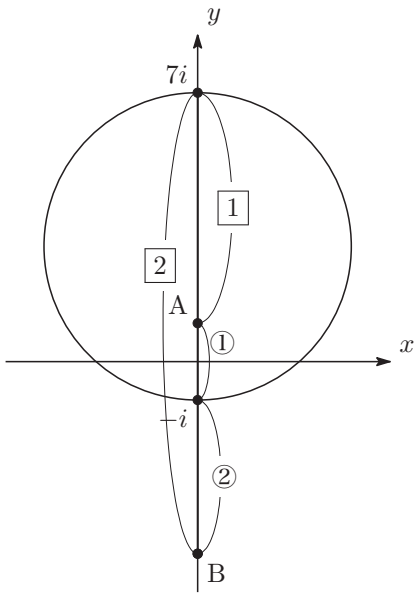
であることに注意すると

$$\boldsymbol{r = 3\sin\theta + \sqrt{9\sin^2\theta + 7}}$$

である．

注釈

円 C はアポロニウスの円である．$\mathrm{A}(i), \mathrm{B}(-5i), \mathrm{P}(z)$ とすると，与えられた方程式から $\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = 1 : 2$ なので，線分 AB を $1 : 2$ に内分する点 $-i$ と外分する点 $7i$ が直径の両端となる．（右図参照）



(ii)　20! が 2 で何回割り切れるかを求めることにより，

$$n = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{20}{2^k}\right] = \left[\frac{20}{2}\right] + \left[\frac{20}{2^2}\right] + \left[\frac{20}{2^3}\right] + \left[\frac{20}{2^4}\right] = 10 + 5 + 2 + 1 = \mathbf{18}$$

また，$(1+2x)^{50}$ の x^{20} の項は ${}_{50}\mathrm{C}_{20} \cdot 1^{30} \cdot (2x)^{20}$ であるので，${}_{50}\mathrm{C}_{20} \cdot 1^{30} \cdot 2^{20} = \dfrac{50!}{20! \cdot 30!} \cdot 2^{20}$ が 2 で割り切れる回数が m である．

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{50}{2^k}\right] = \left[\frac{50}{2}\right] + \left[\frac{50}{2^2}\right] + \left[\frac{50}{2^3}\right] + \left[\frac{50}{2^4}\right] + \left[\frac{50}{2^5}\right] = 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{30}{2^k}\right] = \left[\frac{30}{2}\right] + \left[\frac{30}{2^2}\right] + \left[\frac{30}{2^3}\right] + \left[\frac{30}{2^4}\right] = 15 + 7 + 3 + 1 = 26$$

より 50! は 47 回，30! は 26 回，2 で割り切れるので，

$$m = 47 - 18 - 26 + 20 = \mathbf{23}$$

(iii)　曲線 $y = x^3 - 3\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + 1$ を x 軸方向に $\sqrt{2}$ だけ平行移動して得られる曲線の方程式は

$$y = (x - \sqrt{2})^3 - 3\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + 2\sqrt{2} + 1$$

$$\iff \boldsymbol{y = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + (6 - 3\sqrt{2})x + 7}$$

である．また，

$$\begin{aligned} y &= x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + (6 - 3\sqrt{2})x + 7 \\ &= (x + 1)\{x^2 - (1 + 3\sqrt{2})x + 7\} \end{aligned}$$

であり，2 次方程式 $x^2 - (1 + 3\sqrt{2})x + 7 = 0$ の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned} D &= (1 + 3\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 7 \\ &= -9 + 6\sqrt{2} < 0 \end{aligned}$$

であるから，3 次方程式 $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + (6 - 3\sqrt{2})x + 7 = 0$ の実数解は $x = -1$ のみである．したがって，3 次方程式 $x^3 - 3\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + 1 = 0$ の実数解は $\boldsymbol{x = -1 - \sqrt{2}}$ である．

[II] 次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i) 下の表は，4 人の生徒 A，B，C，D の 100 点満点の数学と英語のテストの得点である。ただし，単位は点とする。このとき，数学のテストの得点の分散は $\boxed{(1)}$ である。また，英語のテストの得点の中央値が $100-\dfrac{x}{3}$ であるとき，数学と英語のテストの得点の共分散は $\boxed{(2)}$ である。

	A	B	C	D
数学のテストの得点	85	90	60	65
英語のテストの得点	80	70	90	x

(ii) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ のとき，関数 $y=\dfrac{1}{\sin(2x+\frac{\pi}{6})}$ の最小値は $\boxed{(3)}$ である。また，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin(2x+\frac{\pi}{6})}$ の値は $\boxed{(4)}$ である。

解答

(1) 162.5　(2) -55　(3) 1　(4) $\log(2+\sqrt{3})$

解説

(i) 数学，英語の得点をそれぞれ X，Y とし，それらの平均をそれぞれ $\overline{X}$，$\overline{Y}$ とする．
数学の平均点は，仮平均を 80 として計算すると

$$\overline{X}=80+\frac{1}{4}\{5+10+(-20)+(-15)\}=80+\frac{1}{4}(-20)=75$$

となるので，以下の表により数学のテストの得点の分散は **162.5** である．

生徒	X	$X-\overline{X}$	$\left(X-\overline{X}\right)^2$
A	85	10	100
B	90	15	225
C	60	-15	225
D	65	-10	100
平均値	75	0	162.5

D の英語の得点 x がどの範囲の値をとるかによって以下のように場合分けをする．

(a) $x \leqq 70$ のとき．
得点を小さい順に並べると，x，70，80，90 となるから中央値の条件により

$$\frac{1}{2}(70+80)=75=100-\frac{x}{3} \iff x=75$$

となるが，これは場合分けの条件に矛盾し不適．

(b) $70<x \leqq 80$ のとき．
同様に得点を小さい順に並べると，70，x，80，90 となるから中央値の条件により

$$\frac{1}{2}(x+80)=100-\frac{x}{3} \iff x=72$$

となり，場合分けの条件に適する．

(c)　$80 < x \leqq 90$ のとき．

同様に得点を小さい順に並べると，70，80，x，90 であり，このとき (b) より $x = 72$ となるが，これは場合分けの条件に矛盾し不適．

(d)　$90 < x \leqq 100$ のとき．

同様に得点を小さい順に並べると，70，80，90，x となるから中央値の条件により

$$\frac{1}{2}(80+90) = 85 = 100 - \frac{x}{3} \iff x = 45$$

となるが，これは場合分けの条件に矛盾し不適．

よって $x = 72$ とわかり，以下の表を得る．表より X，Y の共分散は $\mathbf{-55}$ である．

生徒	X	Y	$X-\overline{X}$	$Y-\overline{Y}$	$\left(X-\overline{X}\right)\left(Y-\overline{Y}\right)$
A	85	80	10	2	20
B	90	70	15	-8	-120
C	60	90	-15	12	-180
D	65	72	-10	-6	60
平均値	75	78	0	0	-55

(ii)　$\dfrac{\pi}{6} \leqq 2x + \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ より，

$$\frac{1}{2} \leqq \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leqq 1 \iff 1 \leqq \frac{1}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)} \leqq 2$$

したがって，最小値は $\mathbf{1}$ となる．

次に $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}$ とおき，$2x + \dfrac{\pi}{6} = t$ と置換すると，

$x:\ 0 \to \dfrac{\pi}{3}$ のとき $t:\ \dfrac{\pi}{6} \to \dfrac{5}{6}\pi$，$dx = \dfrac{1}{2}dt$ となるので，

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{1}{\sin t}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{\sin t}{\sin^2 t}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{\sin t}{1-\cos^2 t}dt \end{aligned}$$

さらに $\cos t = u$ と置換すると，

$t:\ \dfrac{\pi}{6} \to \dfrac{5}{6}\pi$ のとき $u:\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \to -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin t dt = -du$ となるので，

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{-\sqrt{3}}{2}} \frac{-du}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{1-u^2} \quad \text{(偶関数の性質を用いた)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\log|1+u| - \log|1-u| \Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})^2$$

$$= \boldsymbol{\log(2+\sqrt{3})}$$

[III] （記述問題）

媒介変数 t で表される次の曲線を C とする。

$$x(t) = e^{-t}(t+2), \qquad y(t) = (e^{-t-1}-1)(e^{t-1}-1) \qquad (-1 \leqq t \leqq 1)$$

このとき，次の問に答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(i) $y(t)$ の最大値と最小値を求めよ。

(ii) 曲線 C と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

解答

(i)

$$\begin{aligned} y'(t) &= -e^{-t-1}\cdot(e^{t-1}-1) + (e^{-t-1}-1)\cdot e^{t-1} \\ &= \frac{1}{e}(e^{-t}-e^{t}) \end{aligned}$$

より $y'(t)=0$ を解くと $t=0$ となるので，$y(t)$ の増減は以下の通り．

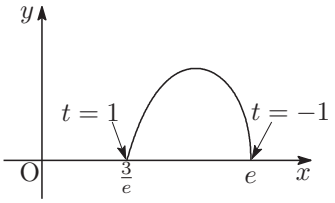
t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\left(1-\frac{1}{e}\right)^2$	$\searrow$	0

したがって，$y(t)$ の最大値は $\boldsymbol{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2}$ $(t=0)$，最小値は $\mathbf{0}$ $(t=-1,\ 1)$ である．

(ii) $x'(t) = -e^{-t}(t+1) \leqq 0$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ より $x(t)$ は単調減少となるので，$x(t)$，$y(t)$ の増減は以下のようになる．

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$x'(t)$		$-$	$-$	$-$	
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$	$\nwarrow$	$\begin{pmatrix} 2 \\ \left(1-\frac{1}{e}\right)^2 \end{pmatrix}$	$\swarrow$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{e} \\ 0 \end{pmatrix}$

したがって曲線 C の概形は



となるので，求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{\frac{3}{e}}^{e} y(t)\,dx &= \int_{1}^{-1} y(t)\frac{dx(t)}{dt}\,dt \\ &= \int_{-1}^{1}(e^{-t-1}-1)(e^{t-1}-1)e^{-t}(t+1)\,dt \\ &= \int_{-1}^{1}(e^{-t-2}-e^{-2t-1}-e^{-1}+e^{-t})(t+1)\,dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\left(-e^{-t-2}+\frac{1}{2}e^{-2t-1}-e^{-1}t-e^{-t}\right)(t+1)\right]_{-1}^{1} \\
&\qquad -\int_{-1}^{1}\left(-e^{-t-2}+\frac{1}{2}e^{-2t-1}-e^{-1}t-e^{-t}\right)dt \\
&= -\frac{1}{e^3}-\frac{4}{e}-\left[e^{-t-2}-\frac{1}{4}e^{-2t-1}-\frac{1}{2}e^{-1}t^2+e^{-t}\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{1}{e^3}-\frac{4}{e}-\left(\frac{3}{4e^3}-\frac{3e}{4}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{3e}{4}-\frac{4}{e}-\frac{7}{4e^3}}
\end{aligned}
$$

別解

y 軸方向の積分と考えると次のようになる．曲線 C の $-1 \leqq t \leqq 0$ に対応する部分および $0 \leqq t \leqq 1$ に対応する部分の x 座標をそれぞれ $x=x_1(t)$, $x=x_2(t)$ とすると，求める面積は

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2} x_1(t)\,dy-\int_0^{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2} x_2(t)\,dy \\
&= \int_{-1}^{0} x_1(t)\frac{dy(t)}{dt}\,dt-\int_{1}^{0} x_2(t)\frac{dy(t)}{dt}\,dt \\
&= \int_{-1}^{0} e^{-t}(t+2)\cdot\frac{1}{e}(e^{-t}-e^{t})\,dt-\int_{1}^{0} e^{-t}(t+2)\cdot\frac{1}{e}(e^{-t}-e^{t})\,dt \\
&= \frac{1}{e}\int_{-1}^{0} e^{-t}(t+2)\cdot(e^{-t}-e^{t})\,dt+\frac{1}{e}\int_{0}^{1} e^{-t}(t+2)\cdot(e^{-t}-e^{t})\,dt \\
&= \frac{1}{e}\int_{-1}^{1} e^{-t}(t+2)\cdot(e^{-t}-e^{t})\,dt \\
&= \frac{1}{e}\int_{-1}^{1}(t+2)(e^{-2t}-1)\,dt \\
&= \frac{1}{e}\left\{\left[(t+2)\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}-t\right)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}-t\right)dt\right\} \\
&= \frac{1}{e}\left\{\left(-\frac{3}{2e^2}+\frac{e^2}{2}-4\right)+\left[-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{1}\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{3e}{4}-\frac{4}{e}-\frac{7}{4e^3}}
\end{aligned}
$$

的中!!

直前授業（1 月 31 日、入試の 2 日前！）

問題　曲線 C が媒介変数 t を用いて，次の式で与えられている．

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

(i)　点 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ を通る曲線 C の接線のうち，傾きが正のものの方程式を求めよ．そのとき，接点に対応する t の値を求めよ．

(ii)　この接線と，曲線 C および x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

これ以外にも、(パラメータ) + (面積計算) は直前期に何度も扱っている.

講評

［I］［小問集合］（標準）
(i) 複素数平面．(1) は基本的．(2) で戸惑った受験生が多かったかも知れない．
(ii) 整数問題．(3) は基本的．(4) は係数を階乗で表すとよい．ここは何とか完答したい．
(iii) 3 次方程式の解．(5) は計算するだけであり落とせない．(6) では (5) を利用することに気付きたい．

［II］［小問集合］（標準）
(i) データの分析．標準的な問題．
(ii) 三角関数の最小値と定積分の計算．定積分の計算はやや重いが，典型的な問題．

［III］［数学Ⅲの微積分］（標準〜やや難）
(i) 極値を求めるだけの基本的な問題．
(ii) 増減を調べ，曲線の概形をつかんだ上で積分をすることになるが，積分計算がやや煩雑である．しっかり計算を合わせることができれば大きく差をつけることが出来そう．

昨年に比べ易化した．どの問題も前半の設問は易しく取り組みやすい．それらを確実に正解した上で，後半の設問でいかに立ち回れたかの勝負となるだろう．
目標は 70% ．

本解答速報の内容に関するお問合せはメビオ 0120-146-156 まで

医学部専門予備校 YMS heart of medicine
☎ 03-3370-0410
受付時間 8〜20時　土日祝可
https://yms.ne.jp/
東京都渋谷区代々木 1-37-14

医学部進学予備校 メビオ
0120-146-156
携帯からOK　土日祝可
受付時間 9〜21時
https://www.mebio.co.jp/
大阪市中央区石町 2-3-12
ベルヴォア天満橋