解答速報

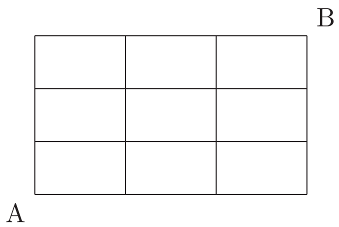
藤田医科大学(AO) 数学

2019年11月10日実施

問題 1

次の問いに答えよ．

(1) 下図のような道のある街で，道を通って最短距離で A から B まで行き，再び最短距離で A まで戻る道順を考える．道順は全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りあり，これらのうち A 以外の地点を 2 度通ることのない道順は全部で $\boxed{\text{エオ}}$ 通りある．



(2) 6 つの条件 p，q，r，s，t，u について，次の 4 つの命題が真であるとき，下記の①～⑤の中で常に真となる命題は $\boxed{\text{カ}}$ である．

・ $p \Rightarrow \overline{q}$　　・ $r \Rightarrow q$　　・ $\overline{r}$ かつ $\overline{s} \Rightarrow \overline{t}$　　・ $u \Rightarrow t$ かつ q

① $\overline{t} \Rightarrow \overline{r}$　② $u \Rightarrow r$　③ $u \Rightarrow q$ かつ s　④ $t \Rightarrow q$ または s　⑤ $s \Rightarrow \overline{p}$

(3) 次のデータの標準偏差は $\boxed{\text{キク}}$ である．

2020,　2032,　2043,　2074,　2096

(4) $\dfrac{2019}{2020}$ を小数で表したとき，小数第 2020 位の数字は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

(5) $f(x)$ を x^2+2 で割った余りが $-2x-1$，x^2+3 で割った余りが $-4x-4$ であるとき，$f(x)$ を $(x^2+2)(x^2+3)$ で割った余りは，$\boxed{\text{コ}}x^3+\boxed{\text{サ}}x^2+\boxed{\text{シ}}x+\boxed{\text{ス}}$ である．

(6) xy 平面上に点 A(3, 0)，B(0, 4) がある．PA : PB $= 3:2$ となる点 P の軌跡を表す図形の周の長さは $\boxed{\text{セソ}}\pi$ である．

(7) xy 平面上で次の 4 つの直線で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{タチ}}$ である．

$$4x-3y=-10,\quad 4x-3y=12,\quad x+2y=-6,\quad x+2y=16$$

(8) 複素数平面上の点 A(1)，B$(1+\sqrt{3}i)$ を原点 O(0) のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点をそれぞれ点 C，D とし，点 A を原点 O のまわりに $\dfrac{2\pi}{3}$ だけ回転した点を E とする．直線 AD と直線 CE の交点を F とすると，

$\mathrm{OF}^2=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である．

(9) $y=f(x)=x^3-x^2-x-1$ のグラフの極小となる点で $y=f(x)$ のグラフの接線を引く．この接線と $y=f(x)$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である．

(10) $f(x)=\sqrt{x^3+9}$ とおくとき，$f'(3)=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ であり，$\displaystyle\int_0^3 \frac{3x^2}{2f(x)}\,dx=\boxed{\text{ネ}}$ である．

解答

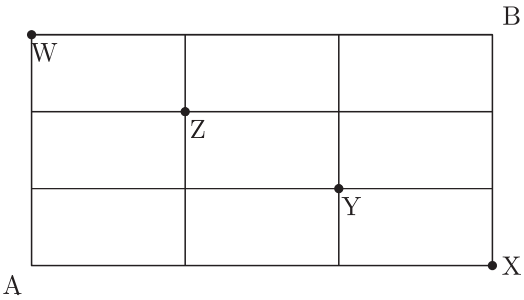
解答記号	正解
アイウ通り	400 通り
エオ通り	40 通り
カ	④
キク	28
ケ	5
コ x^3 + サ x^2 + シ x + ス	$2x^3+3x^2+2x+5$

解答記号	正解
セソ π	12π
タチ	44
$\dfrac{\text{ツ}}{\text{テ}}$	$\dfrac{3}{4}$
$\dfrac{\text{ト}}{\text{ナ}}$	$\dfrac{4}{3}$
$\dfrac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}$	$\dfrac{9}{4}$
ネ	3

解説

(1) A から B に最短距離で行く行き方は $\dfrac{6!}{3!3!}=20$ 通りある．戻る道順も 20 通りあるので，往復経路は全部で $20\times20=$ **400 通り** ある．

往路と復路が A, B 以外の共有点を持たない経路は次のように場合分けして数えればよい．



図のように点 X, Y, Z, W を決める．同時に，A(0, 0), B(3, 3), X(3, 0), W(0, 3) となるように直交座標を定める．

まず，往復の閉路が反時計回りになっているものを考える．

(i) 往路が X, 復路が Y を通る場合．

往路は 1 通りしかない．復路も $(3,\ 3)\to(2,\ 3)\to(2,\ 1)\to(0,\ 1)\to(0,\ 0)$ しかないので，往復で 1 通り．

(ii) 往路が X, 復路が Z を通る場合．

往路は 1 通りしかない．復路は $(3,\ 3)\to(2,\ 3)$ と $(0,\ 1)\to(0,\ 0)$ は決まっているが，$(2,\ 3)\to(1,\ 2)$ および $(1,\ 2)\to(0,\ 1)$ は 2 通りずつある．結局往復で $2\times2=4$ 通り．

(iii) 往路が X, 復路が W を通る場合．

往路，復路ともに 1 通りしかない．往復で 1 通り．

(iv) 往路が Y, 復路が Z を通る場合．

- 往路が $(2,\ 0)$, $(3,\ 1)$ を通るものが 1 通りで，その場合往路は 1 通り，復路は 4 通り，往復で 4 通り．
- 往路が $(2,\ 0)$, $(2,\ 2)$ を通る場合 $(3,\ 2)$ も通らねばならない．その場合往路は 1 通り，復路は 2 通り，往復で 2 通り．
- 往路が $(1,\ 1)$, $(3,\ 1)$ を通る場合 $(1,\ 0)$ も通らねばならない．その場合往路は 1 通り，復路は 2 通り，往復で 2 通り．

- 往路が (1, 1), (2, 2) を通る場合 (1, 0), (3, 2) も通らねばならない．その場合往路は 1 通り，復路は 1 通り，往復で 1 通り．

以上よりこの場合は $4+2+2+1=9$ 通りである．

(v) 往路が Y, 復路が W を通る場合．

(ii) と同じく往復で 4 通り．

(vi) 往路が Z, 復路が W を通る場合．

(i) と同じく往復で 1 通り．

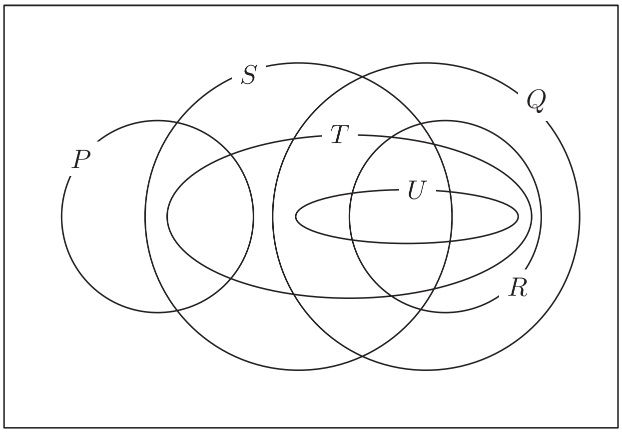
以上より反時計回りのものは $1+4+1+9+4+1=20$ 通りであるとわかった．時計回りのものも同数存在するので，全部で **40 通り** である．

(2) 条件 $p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ u$ を満たすものの集合を，それぞれ $P,\ Q,\ R,\ S,\ T,\ U$ で表すことにしよう．$p \Longrightarrow \overline{q}$ は $P \subset \overline{Q}$ と同値であるが，これはさらに $P \cap Q = \phi$ （ϕ は空集合を表す）と同値である．

同様にして

$$(r \Longrightarrow q) \iff R \subset Q$$
$$(\overline{r} \text{ かつ } \overline{s} \Longrightarrow \overline{t}) \iff (t \Longrightarrow r \text{ または } s) \iff T \subset R \cup S$$
$$(u \Longrightarrow t \text{ かつ } q) \iff U \subset T \cap Q$$

が成り立っている．この関係は次のベン図で表すことが出来る．



これを見ると

$$① \iff R \subset T$$
$$② \iff U \subset R$$
$$③ \iff U \subset Q \cap S$$
$$④ \iff T \subset Q \cup S$$
$$⑤ \iff S \cap P = \phi$$

のうち成り立っているのは ④ だけだとわかる．(④ の $T \subset Q \cup S$ が成り立つことは $T \subset R \cup S$ と $R \subset Q$ から容易にわかる．)

(3) 全体を平行移動しても分散や標準偏差は変わらないので，それぞれの値から 2050 ずつ引くと，

$$-30,\ -18,\ -7,\ 24,\ 46$$

である．これらの平均 μ と分散 σ^2 は，

$$\mu = \frac{(-30)+(-18)+(-7)+24+46}{5} = 3, \quad \sigma^2 = \frac{33^2+21^2+10^2+21^2+43^2}{5} = 784$$

である．したがって，標準偏差は，$\sigma = \sqrt{784} = \mathbf{28}$ である．

(4)

$$\frac{1}{2020}=0.000\dot{4}95\dot{0}$$

であるから，

$$\frac{2019}{2020}=1-\frac{1}{2020}=0.99\dot{9}50\dot{4}$$

となるので，小数第 2020 位の数は **5** である．

$\boxed{\text{別解}}$

$2020=20\times 101$ であり，$100\equiv -1 \pmod{101}$，$2019\equiv -1 \pmod{101}$ なので，

$$2019\cdot 10^{2019}\equiv 2019\cdot 100^{1009}\cdot 10\equiv(-1)\cdot(-1)^{1009}\cdot 10\equiv 10 \pmod{101}$$

である．さらに，$2019\cdot 10^{2019}\equiv 0 \pmod{20}$ であるが，

$$1020\equiv 10 \pmod{101} \text{ かつ } 1020\equiv 0 \pmod{20}$$

なので，

$$2019\cdot 10^{2019}\equiv 1020 \pmod{2020}$$

である．よって，ある自然数 n を用いて，

$$\frac{2019\cdot 10^{2019}}{2020}=\frac{2020n+1020}{2020}=n+\frac{1020}{2020}=n+0.5049\cdots$$

と表されるので，$\dfrac{2019}{2020}$ の小数第 2020 位の数字は **5** である．

(5)　題意より，

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2+2)(x^2+3)q(x)+(ax+b)(x^2+2)-2x-1\\&=(x^2+2)(x^2+3)q(x)+(cx+d)(x^2+3)-4x-4\end{aligned}$$

である．剰余の部分を係数比較すると，

$$\begin{cases}a=c\\b=d\\2a-2=3c-4\\2b-1=3d-4\end{cases}$$

となる．これを解くと，$a=c=2$，$b=d=3$ となるので，求める余りは

$$(2x+3)(x^2+2)-2x-1=(2x+3)(x^2+3)-4x-4=\boldsymbol{2x^3+3x^2+2x+5}$$

である．

(6)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと題意より，

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}:\sqrt{x^2+(y-4)^2}=3:2 \iff 2\sqrt{(x-3)^2+y^2}=3\sqrt{x^2+(y-4)^2}$$

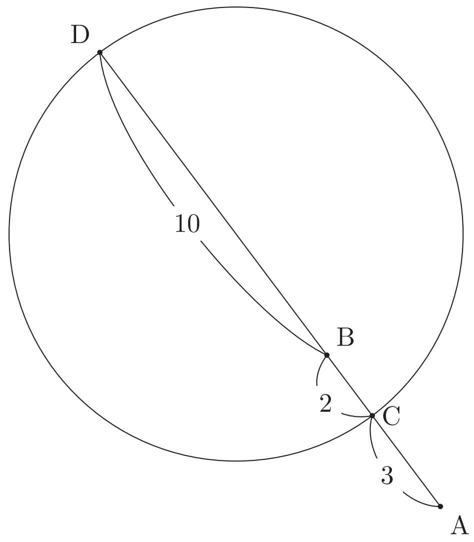
である．両辺を 2 乗して整理すると，

$$5x^2+5y^2+24x-72y+108=0 \iff \left(x+\frac{12}{5}\right)^2+\left(y-\frac{36}{5}\right)^2=36$$

となるので，点 P の軌跡は半径 6 の円であり，周の長さは $\boldsymbol{12\pi}$ である．

別解

点 P の軌跡は**アポロニウスの円**である．AB を 3 : 2 に内分する点を C，外分する点を D とすると，CD を直径とする円である．AB = 5 なので，CB = 2，BD = 10 であるから，円の直径は 12 であり，周の長さは $\boldsymbol{12\pi}$ となる．



(7)　4 直線 $4x-3y=-10$, $4x-3y=12$, $x+2y=-6$, $x+2y=16$ で囲まれた部分（平行四辺形）の面積はそれぞれを平行移動した 4 直線 $4x-3y=0\cdots$①, $4x-3y=22\cdots$②, $x+2y=0\cdots$③, $x+2y=22\cdots$④で囲まれた部分の面積に等しい．ここで，②，③の交点を A とすると A(4, −2)，①，④の交点を B とすると B(6, 8) であり，囲まれた部分は線分 OA，線分 OB を隣り合う 2 辺とする平行四辺形であるから，求める面積は $|4\cdot 8-(-2)\cdot 6| = \mathbf{44}$ である．

(8)　点 C を表す複素数は $1\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,

点 D を表す複素数は $(1+\sqrt{3}i)\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=-1+\sqrt{3}i$,

点 E を表す複素数は $1\cdot\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

となるので，線分 AD，線分 CE は互いに他の中点で交わる．したがって，点 F を表す複素数は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，$\mathrm{OF}^2=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$ である．

(9)　$f'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$ であり，$f'(x)$ の符号は $x=1$ の前後で負から正に変わるので，極小値は $f(1)=-2$ である，したがって，極小点における接線の方程式は $y=-2$ であるから，この接線と $y=f(x)$ の交点の x 座標は

$$x^3-x^2-x-1=-2 \iff x^3-x^2-x+1=0 \iff (x-1)^2(x+1)=0 \iff x=1,\ -1$$

となる．したがって，接点以外の交点の x 座標は -1 であり，求める面積は

$$\int_{-1}^{1}\{(x^3-x^2-x-1)-(-2)\}\,dx=\frac{1}{12}\{1-(-1)\}^4=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

である．

(10)　$f'(x)=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+9}}$ であるから，$f'(3)=\boldsymbol{\dfrac{9}{4}}$ である．また，

$$\begin{aligned}\int_0^3\frac{3x^2}{2f(x)}\,dx&=\int_0^3\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+9}}\,dx=\int_0^3 f'(x)dx\\&=[f(x)]_0^3=f(3)-f(0)\end{aligned}$$

$$= \mathbf{3}$$

である.

問題 2

各面が辺の長さ 8，9，9 の二等辺三角形である四面体がある．次の問いに答えよ．

(1)　この四面体の体積を求めよ．

(2)　この四面体のすべての頂点を通る球面の直径を求めよ．

(3)　この四面体のすべての面に接する球面の直径を求めよ．

解答

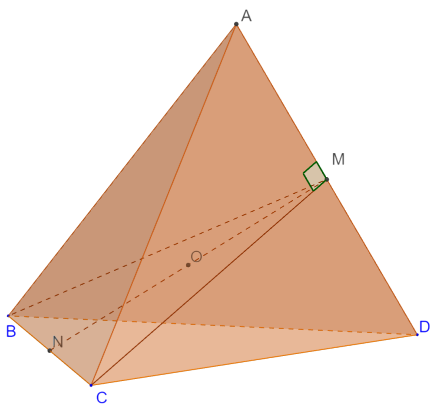
(1)　図のように 4 頂点を設定する．ここで，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{DB} = \mathrm{DC} = 9$，$\mathrm{AD} = \mathrm{BC} = 8$ とする．線分 AD，線分 BC の中点をそれぞれ M，N とすると，辺 AD は平面 MBC に垂直である．ここで，三平方の定理により

$$\mathrm{CM} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 - \mathrm{AM}^2} = \sqrt{9^2 - 4^2} = \sqrt{65},\ \mathrm{MN} = \sqrt{\mathrm{CM}^2 - \mathrm{CN}^2} = \sqrt{65 - 4^2} = 7$$

であるから，求める体積は

$$\frac{1}{3} \times (\triangle\mathrm{MBC}\ \text{の面積}) \times \mathrm{AD} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7\right) \cdot 8 = \mathbf{\frac{224}{3}}$$

である．



(2)　線分 MN の中点を O とすると，この点 O が外接球の中心となるので，外接球の半径 R は三平方の定理により

$$R = \mathrm{AO} = \sqrt{\mathrm{AM}^2 + \mathrm{OM}^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{113}}{2}$$

である．したがって，求める直径は $2R = \boldsymbol{\sqrt{113}}$ である．

(3)　内接球の半径を r とすると，四面体 OABC，四面体 OACD，四面体 OADB，四面体 OBCD はすべて合同な四面体である．ここで，四面体 ABCD の体積を V_{ABCD} などと表すことにすると

$$V_{\mathrm{ABCD}} = V_{\mathrm{OABC}} + V_{\mathrm{OACD}} + V_{\mathrm{OADB}} + V_{\mathrm{OBCD}}$$

$$\iff \frac{224}{3} = 4 \times \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{65}\right) \cdot r$$

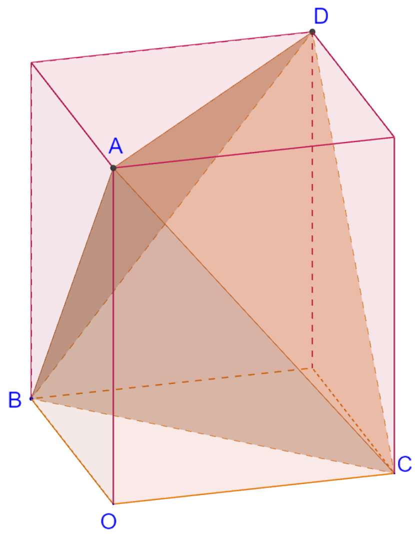
であるから，これを解いて $r = \frac{14\sqrt{65}}{65}$ となるので，求める直径は $2r = \mathbf{\frac{28\sqrt{65}}{65}}$ である．

（参考）4 つの面がすべて合同な三角形からなる四面体を「等面四面体」とよぶ．下図のように等面四面体は直方体の中に埋め込むことが出来る．いまの場合，$\mathrm{OA}=a$，$\mathrm{OB}=b$，$\mathrm{OC}=c$ とすると（ここでの O は先の O とは異なる），三平方の定理により $a^2+b^2=9^2$，$b^2+c^2=8^2$，$c^2+a^2=9^2$ となるので，これより $a=7$，$b=c=4\sqrt{2}$ が得られる．したがって，四面体 ABCD は $\mathrm{OA}=7$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=4\sqrt{2}$ であるような直方体に埋め込むことができる．このことから，この直方体を T とすると次のような別解も可能である．

(1)

$$\begin{aligned}(\text{四面体 ABCD の体積}) &= (T\text{ の体積}) - 4\times(\text{四面体 OABC の体積})\\ &= 4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 7 - 4\times\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 7\\ &= \boldsymbol{\frac{224}{3}}\end{aligned}$$

(2)　求める直径は下図の直方体の対角線 OD の長さに等しいので，その値は $\sqrt{(4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2+7^2}=\boldsymbol{\sqrt{113}}$ である．



問題 3

袋の中に赤の玉が 3 個，白の玉が 3 個，青の玉が 3 個入っている．袋から玉を 3 個同時に取り出す試行を行う．

(1)　試行を 1 回行ったとき，全ての玉が同じ色である確率を求めよ．

(2)　試行を 1 回行ったとき，赤，白，青の各玉が 1 個ずつ取り出される確率を求めよ．

(3)　1 回目の試行を行った後，袋の中に全ての玉を戻して 2 回目の試行を行う．1 回目と 2 回目で取り出された 3 つの玉の色の組み合わせが同一である確率を求めよ．

解答

(1)　9 個の玉を全て区別すると 3 個の玉の取り出し方は ${}_9\mathrm{C}_3 = 84$ 通りある．これらは全て同様に確からしい．そのうち全ての玉が同色になっているものは 3 通り存在するので，求める確率は $\dfrac{3}{84} = \boldsymbol{\dfrac{1}{28}}$.

(2)　(1) と同様 84 通りの取り出し方のうち，赤，白，青の各玉が 1 個ずつになっているものは 3^3 通り存在するので，求める確率は $\dfrac{3^3}{84} = \boldsymbol{\dfrac{9}{28}}$.

(3)　次の 3 通りに分けて考える．

(i)　1 回目，2 回目ともに 3 つの玉の色が全て同じである場合．

1 回目の玉が全て同色である確率は (1) より $\dfrac{1}{28}$ である．この場合 2 回目は全て 1 回目と同じ色の玉を取り出さないといけないので，その確率は $\dfrac{1}{84}$ である．したがってこの場合の確率は $\dfrac{1}{28} \times \dfrac{1}{84}$ である．

(ii)　1 回目，2 回目ともに 3 つの玉の色が全て異なる場合．

1 回目の玉の色が全て異なる確率は (2) より $\dfrac{9}{28}$ である．この場合 2 回目も全て異なればよいので，その確率は $\dfrac{9}{28}$ である．したがってこの場合の確率は $\dfrac{9}{28} \times \dfrac{9}{28}$ である．

(iii)　1 回目，2 回目ともにちょうど 2 つの玉の色が一致する場合．

1 回目に関しては，どの色の玉が 2 個出るかが 3 通り，その玉の選び方が ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通り，どの色の玉が 1 個出るかは先程の色と異なる色を選ぶので 2 通り，その玉の選び方が ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$ 通りである．

2 回目に関しては，どの色の玉が 2 個出るかは決まっていて，その玉の選び方が ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通り，どの色の玉が 1 個出るかも決まっていて，その玉の選び方が ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$ 通りである．したがってこの場合の確率は $\dfrac{3 \times 3 \times 2 \times 3}{84} \times \dfrac{3 \times 3}{84}$ である．

以上により求める確率は

$$\frac{1}{28} \times \frac{1}{84} + \frac{9}{28} \times \frac{9}{28} + \frac{3 \times 3 \times 2 \times 3}{84} \times \frac{3 \times 3}{84} = \boldsymbol{\frac{29}{168}}$$

講評

問題 1［小問集合］((1) 易＋やや難 (2) 難 (3) 標準 (4) 標準 (5) やや易 (6) やや易 (7) 標準 (8) 標準 (9) 易 (10) 易）上半分に取り組みにくい問題が並んでいる．時間がかかりそうな問題は後回しにして，解きやすい問題から解き始めたい．

問題 2［空間図形］（やや難）いわゆる「等面四面体」の問題であるが，体積の求め方で戸惑った受験生も多かったかもしれない．

問題 3 [確率]（やや易）袋の中から玉を取り出すのは確率の典型問題である．ここはしっかりと満点を取りたい．

問題ごとの難易の差が大きい．先頭から解こうとせずに，解きやすい問題から解き始めたい．3 番を完答して，残りで半分程度を狙うイメージで．目標は 60%.