解答速報

藤田医科大学（後期）　数学

2020年 3月 3日実施

問題 1

(1)　$x = 46656$ のとき，$e^{2\log x} = y^3$ を満たす実数 y は $\boxed{\text{アイウエ}}$ である。

(2)　ある会社で同じ製品を 2 つの工場 X，Y で製造していて，製品に不良品が含まれる確率は，工場 X では 2%，工場 Y では 1% である。工場 X の製品と工場 Y の製品を 5 : 2 の割合で混ぜた大量の製品の中から 1 個を取り出したところ，それが不良品であったとき，それが工場 X で製造された製品である確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{a\sqrt{x+13}-b}{x-3} = \frac{1}{4}$ が成り立つような実数 a，b は，$a = \boxed{\text{キ}}$，$b = \boxed{\text{ク}}$ である。

(4)　$z = 1-\sqrt{3}i$ のとき，$z^7 + az^5 - b = 0$ が成り立つような実数 a，b は，$a = \boxed{\text{ケ}}$，$b = \boxed{\text{コサシ}}$ である。

(5)　$f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + 2\cos x}$ のとき，$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$，$\dfrac{1}{4}f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \boxed{\text{ソタ}} - \boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

(6)　正六面体のさいころと正八面体のさいころが 1 つずつある。正六面体のさいころの各面には 1 から 6 までの異なる整数がそれぞれ 1 つずつ書かれてあり，正八面体のさいころの各面には 1 から 8 までの異なる整数がそれぞれ 1 つずつ書かれてある。この 2 つのさいころを同時に投げて，正八面体のさいころの出た目を a，正六面体のさいころの出た目を b とする。方程式 $ax^2 + bx + 1 = 0$ が異なる実数解をもつ確率は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ である。

(7)　xy 平面上の双曲線 $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ 上に点 $\mathrm{P}(p,\ 4)$ をとる (ただし $p > 0$)。この双曲線の 2 焦点を F，F$'$ とすると，$\angle\mathrm{FPF'}$ の二等分線と x 軸との交点は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}},\ 0\right)$ である。

(8)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^7 x}\,dx = \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。

(9)　$f(x) = x^2 + ax + 2a - 3$ について，$1 < x < 2$ の範囲のすべての x に対して $f(x) > 0$ であるための a の値の範囲は $a \geqq \dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$ である。

(10)　n 段の階段を上がるのに，1 歩で 1 段または 2 段または 3 段上がることができるとする。$n = 12$ のとき，上がり方は $\boxed{\text{ホマミ}}$ 通りある。

(11)　三角形 ABC において，AB $= 8$，BC $= 5$，CA $= 7$ のとき，三角形 ABC の外心を P とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \boxed{\text{ムメ}}$ である。

解答

解答記号	正解
アイウエ	1296
$\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}$	$\dfrac{5}{6}$
キ，ク	2，8
ケ，コサシ	4，128
$\dfrac{\text{ス}}{\text{セ}}$	$\dfrac{4}{9}$
ソタ − チ$\sqrt{\text{ツ}}$	$10-7\sqrt{2}$

解答記号	正解
$\dfrac{\text{テト}}{\text{ナニ}}$	$\dfrac{19}{48}$
$\dfrac{\text{ヌネ}}{\text{ノ}}$	$\dfrac{12}{5}$
$\dfrac{\text{ハ}}{\text{ヒ}}$	$\dfrac{7}{6}$
$\dfrac{\text{フ}}{\text{ヘ}}$	$\dfrac{2}{3}$
ホマミ	927
ムメ	32

解説

(1) $e^{2\log x}=y^3 \iff x^2=y^3 \iff y=x^{2/3}$ である．また, $x=46656=2^6\cdot 3^6$ であるから, $y=2^4\cdot 3^4=\mathbf{1296}$.

(2) 事象 A, B をそれぞれ,

事象 A：1 個取り出してそれが不良品である.

事象 B：1 個取り出してそれが工場 X で製造された製品である.

と定める．また，事象 A が起こる確率を $P(A)$ などと表すことにする．1 個取り出してそれが工場 X で製造された不良品である（この事象は $A\cap B$）確率は $\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{2}{100}$，1 個取り出してそれが工場 Y で製造された不良品である確率は $\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{1}{100}$ であるから，$P(A)=\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{2}{100}+\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{1}{100}$ となるので，求める確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{100}}{\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{100}+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{100}}=\mathbf{\frac{5}{6}}$$ である.

(3) 与式の分母が 0 に収束することから，与式の分子が 0 に収束することが必要．よって

$$\lim_{x\to 3}(a\sqrt{x+13}-b)=4a-b=0 \quad \therefore\ b=4a$$

これを与式に代入すると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{a\sqrt{x+13}-4a}{x-3}&=\lim_{x\to 3}\frac{a\{(x+13)-16\}}{(x-3)(\sqrt{x+13}+4)}\\&=\lim_{x\to 3}\frac{a(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+13}+4)}\\&=\lim_{x\to 3}\frac{a}{\sqrt{x+13}+4}\\&=\frac{a}{8}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる．これより $a=\mathbf{2}$，$b=\mathbf{8}$.

(4) $z=2\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$ と表せるため，ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned}z^7&=2^7\left\{\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7}{3}\pi\right)\right\}\\&=2^7\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\end{aligned}$$

$$z^5 = 2^5\left\{\cos\left(-\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{3}\pi\right)\right\}$$
$$= 2^5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

となる．これを与式に代入し，両辺の実部と虚部をそれぞれ比較すると

$$2^6 + 2^4 a - b = 0, \quad -2^6\sqrt{3} + 2^4\sqrt{3}a = 0$$

が得られる．これを解くと $a = \mathbf{4}$，$b = \mathbf{128}$.

(5)

$$f'(x) = \frac{\cos x(\sin x + 2\cos x) - \sin x(\cos x - 2\sin x)}{(\sin x + 2\cos x)^2}$$
$$= \frac{2}{(\sin x + 2\cos x)^2}$$
$$= \frac{2}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x}$$
$$= \frac{2}{1 + 2\sin 2x + 3\cos^2 x}$$
$$= \frac{2}{1 + 2\sin 2x + \frac{3}{2}(1 + \cos 2x)}$$

これより，$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \mathbf{\frac{4}{9}}$，$\frac{1}{4}f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \mathbf{10 - 7\sqrt{2}}$.

(6) 与方程式が異なる実数解をもつ条件は，
$b^2 - 4a > 0 \iff b^2 > 4a$ である．
表により，求める確率は $\mathbf{\frac{19}{48}}$.

$4a \setminus b^2$	1	4	9	16	25	36
4			○	○	○	○
8			○	○	○	○
12				○	○	○
16					○	○
20					○	○
24					○	○
28						○
32						○

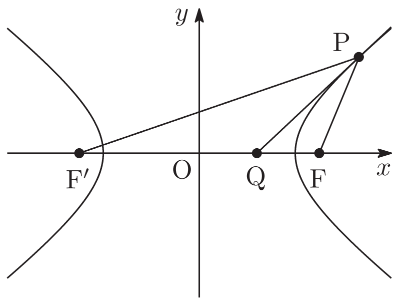
(7) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ に $\mathrm{P}(p,\ 4)$ を代入することにより，$p = \frac{20}{3}$ が分かる．したがって，点 P における曲線の接線の方程式は

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{20}{3}\cdot x - \frac{1}{9}\cdot 4\cdot y = 1 \iff \frac{5}{12}x - \frac{4}{9}y = 1$$

となる．この接線が $\angle\mathrm{FPF'}$ の二等分線（有名事実）なので，求める交点は $\left(\mathbf{\frac{12}{5}},\ 0\right)$.

別解

$F(5,\ 0),\ F'(-5,\ 0)$ とする．$P\left(\dfrac{20}{3},\ 4\right)$ なので，距離を計算すると $PF=\dfrac{13}{3}$，$PF'=\dfrac{37}{3}$ が分かる．したがって，$\angle FPF'$ の二等分線と x 軸との交点を Q とすると，角の二等分線の性質から



$$FQ : F'Q = PF : PF' = 13 : 37$$

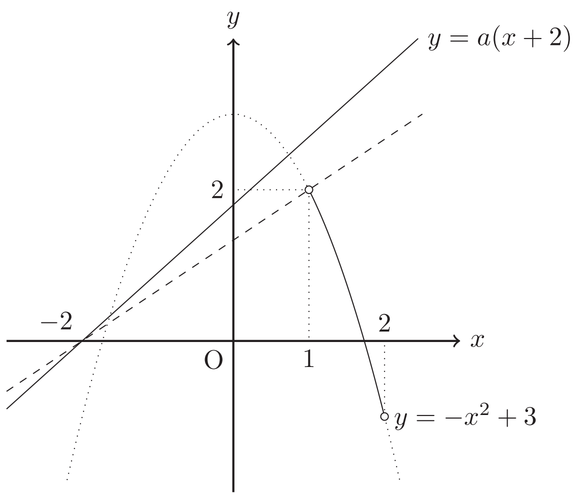
が分かるから，求める x 座標は

$$\frac{37\cdot 5+13(-5)}{37+13}=\boldsymbol{\frac{12}{5}}$$

(8)　$\cos x = t$ と置換すると，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^7 x}\,dx=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{-1}{t^7}\,dt=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}t^{-7}\,dt=\left[-\frac{1}{6}t^{-6}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}=\boldsymbol{\frac{7}{6}}$$

(9)　$x^2+ax+2a-3>0 \iff a(x+2)>-x^2+3$ より，$1<x<2$ において，直線 $y=a(x+2)$ が曲線 $y=-x^2+3$ より上方にあればよい．よって，右図より，$\boldsymbol{a \geqq \frac{2}{3}}$ である．



別解

軸：$x=-\dfrac{a}{2}$，判別式 $D=(a-2)(a-6)$，$f(1)=3a-2$，$f(2)=4a+1$ を使って

(i)　(軸) $\leqq 1 \iff a \geqq -2$ のとき，$f(1)\geqq 0 \iff a\geqq \dfrac{2}{3}$．よって $a\geqq\dfrac{2}{3}$．

(ii)　$1<$ (軸) $<2 \iff -4<a<-2$ のとき，$D<0 \iff 2<a<6$．よって解なし．

(iii)　(軸) $\geqq 2 \iff a\leqq -4$ のとき，$f(2)\geqq 0 \iff a\geqq -\dfrac{1}{4}$．よって解なし．

(i)〜(iii) より $a \geqq \boldsymbol{\frac{2}{3}}$．

(10)　$n \geqq 4$ のとき，n 段の階段の上がり方が a_n 通りであるとする．n 段目に上がる 1 歩前は，$n-1$ 段目または $n-2$ 段目または $n-3$ 段目にいるので，

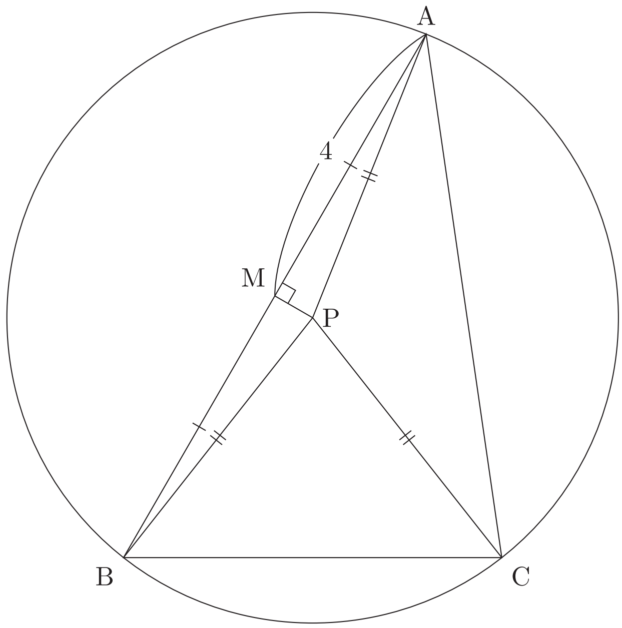
$$a_n = a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}$$

が成り立つ．$a_1=1$ は明らか．a_2 は 1 段ずつ上がる，または 1 歩で 2 段あがる，の 2 通りなので $a_2=2$．a_3 は 1 段ずつ上がる，または 1 段上がってから 2 段上がる，または 2 段上がってから 1 段上がる，または 1 歩で 3 段上がる，の 4 通りなので $a_3=4$．以上より次の表を作成できる．答えは **927**．

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504	**927**

(11) 点 P から辺 AB に下ろした垂線と AB の交点を M とすると，P が三角形 ABC の外心であることから M は辺 AB の中点となる．したがって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\angle\mathrm{PAB} \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AM}}| \\ &= 8\cdot 4 = \mathbf{32}\end{aligned}$$



別解

P は三角形 ABC の外心なので $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BP}}| \cdots$ ① が成り立つ．$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから，①の両辺を 2 乗すると $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$ となるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = \mathbf{32}$$

注釈

以上のように，辺 BC, CA の長さには無関係に答が決まるのだが，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表してから $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を計算しても求まる（ただし作業は煩雑になる）．この場合の要点を記しておくと以下のようになる．

三辺の長さから $\vec{b}\cdot\vec{c} = 44$ が分かる．

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x\vec{b} + y\vec{c}$ とおくと，$\begin{cases} |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2 \quad \text{より} \quad 16x + 11y = 8 \\ |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 \quad \text{より} \quad 88x + 98y = 49 \end{cases}$

これらを連立して解くと $x = \dfrac{49}{120}$，$y = \dfrac{2}{15}$ が得られる．したがって $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{49}{120}\vec{b} + \dfrac{2}{15}\vec{c}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{49}{120}|\vec{b}|^2 + \frac{2}{15}\vec{b}\cdot\vec{c} = \mathbf{32}$$

問題２

A，B，C の３人がおり，そのうち１人が１個のボールを持っている。３人のうちボールを持っていない２人がゲームを行い，勝った人がボールを持っていた人からボールを受け取るという試行を繰り返す。A が B に勝つ確率，A が C に勝つ確率，および C が B に勝つ確率はいずれも $\dfrac{2}{3}$ であり，引き分けはない。

最初に A がボールを持っている場合に，n 回の試行が行われた後で A，B，C がボールを持っている確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする。$a_n+b_n+c_n=1$ に注意して次の問いに答えよ。

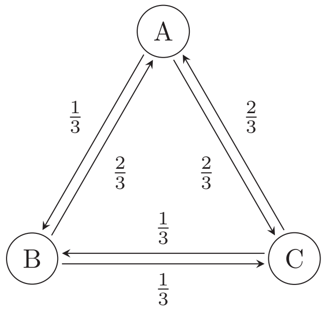
(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　a_n，b_n を n の式で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

A，B，C がボールを持っている状態をそれぞれ A，B，C とすると，状態遷移図は右の通りである．よって，これを元にして漸化式を作ると，



$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{2}{3}c_n & \cdots ① \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{1}{3}c_n & \cdots ② \\ c_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}b_n & \cdots ③ \end{cases}$$

となる．また，$a_1=0$，$b_1=\dfrac{1}{3}$，$c_1=\dfrac{2}{3}$ である．

(1)　$a_n+b_n+c_n=1$ より $b_n+c_n=1-a_n$ であるから，① より

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}(b_n+c_n)=\frac{2}{3}(1-a_n)\ \cdots ④$$

となるので，

$$a_2=\frac{2}{3}(1-a_1)=\mathbf{\frac{2}{3}},\quad a_3=\frac{2}{3}(1-a_2)=\mathbf{\frac{2}{9}},\quad a_4=\frac{2}{3}(1-a_3)=\mathbf{\frac{14}{27}}$$

である．

(2)　④ より，

$$a_{n+1}-\frac{2}{5}=-\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{2}{5}\right)$$

となるので，

$$a_n-\frac{2}{5}=\left(a_1-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \iff \boldsymbol{a_n=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$$

である．同様に，② から，

$$b_{n+1}=\frac{1}{3}(1-b_n) \iff b_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(b_n-\frac{1}{4}\right)$$

より，

$$b_n-\frac{1}{4}=\left(b_1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \iff \boldsymbol{b_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

である．

(3)　$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は収束し，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{5}, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{4}$$

となるので，

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}(1 - a_n - b_n) = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{7}{20}}$$

問題3

平面上に，下図のように，一辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形 ABC と，正三角形 ABC をその重心 G のまわりに角度 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$ 回転させてできる正三角形 A′B′C′ がある。$\theta = 0$ のときに頂点 A と頂点 A′，頂点 B と頂点 B′，頂点 C と頂点 C′ が各々重なっていて，$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ のときに頂点 A′ が頂点 B に重なる向きに回転させるとする。$0 < \theta < \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，辺 AB と辺 A′C′ との交点を P とする。$u = \tan\dfrac{\theta}{2}$ とし，線分 AP の長さを u の関数 $l(u)$ とおく。また，正三角形 ABC で囲まれる部分と正三角形 A′B′C′ で囲まれる部分の共通部分の面積を u の関数 $S(u)$ とおく。次の問いに答えよ。

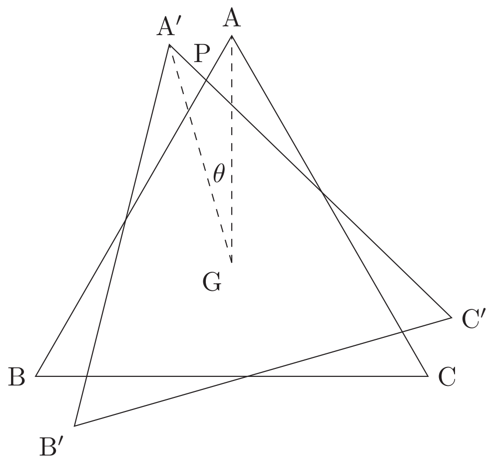
(1)　線分 AA′ の長さを u の式で表せ。

(2)　$l(u)$ を u の式で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{u\to\sqrt{3}} l(u)$ の値を求めよ。

(4)　$S(u)$ を u の式で表せ。

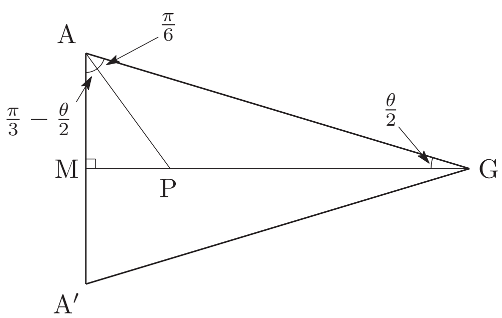
(5)　$S(u)$ の増減を調べ，最小値とそのときの θ の値を求めよ。



解答

(1)　線分 AA′ の中点を M とすると，AG $= 1$，$\angle$AGP $= \dfrac{\theta}{2}$ であるから，

$$\mathrm{AA'} = 2\mathrm{AG}\sin\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2} = \boldsymbol{\frac{2u}{\sqrt{1+u^2}}}$$



(2)　$\angle\mathrm{PAM} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\theta}{2}$ であるから，

$$l(u) = \frac{\mathrm{AM}}{\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\theta}{2}\right)}$$

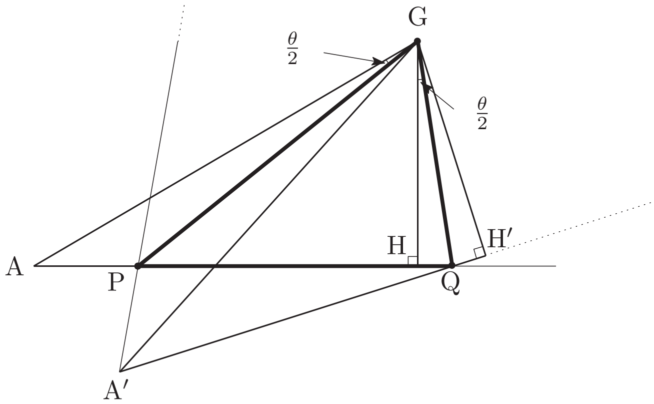
$$= \frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\tan\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\dfrac{\theta}{2}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{2u}{1+\sqrt{3}u}}$$

(3) $\displaystyle\lim_{u\to\sqrt{3}} l(u) = \lim_{u\to\sqrt{3}} \frac{2u}{1+\sqrt{3}u} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(4) G から AB，A′B′ に下ろした垂線の足をそれぞれ H，H′ とし，AB，A′B′ の交点を Q とおくと，$\mathrm{GH} = \dfrac{1}{2}$，$\angle\mathrm{AGP} = \angle\mathrm{HGQ} = \dfrac{\theta}{2}$ および $\angle\mathrm{PGQ} = \dfrac{\pi}{3}$ となる．このとき共通部分の面積は $6 \times (\triangle\mathrm{PGQ}$ の面積$)$ である．



ここで，$\triangle\mathrm{A'QP}$ において $\angle\mathrm{A'QP} = \theta$ であり，$\mathrm{A'P} = l(u)$ であるから，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{PQ}}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = \frac{\mathrm{A'P}}{\sin\theta} \iff \mathrm{PQ} = \frac{\sqrt{3}l(u)}{2\sin\theta}$$

となるので，

$$\begin{aligned}
S(u) &= 6 \times (\triangle\mathrm{PGQ}\text{ の面積}) \\
&= 6\cdot\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{GH} \\
&= 3\cdot\frac{\sqrt{3}l(u)}{2\sin\theta}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{l(u)}{\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{l(u)}{\tan\dfrac{\theta}{2}\cos^2\dfrac{\theta}{2}} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{l(u)}{\dfrac{u}{1+u^2}} \\
&= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}(1+u^2)}{4(1+\sqrt{3}u)}}
\end{aligned}$$

(△PGQ の面積を求める際の別解 1)
以下のように $l(u)$ を用いずに求めることも出来る．
$\mathrm{GH}=\dfrac{1}{2}$ なので，$\mathrm{QH}=\mathrm{GH}\tan\angle\mathrm{QGH}=\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{u}{2}$，また，

$$\begin{aligned}
\mathrm{PH}&=\mathrm{GH}\tan\angle\mathrm{PGH}\\
&=\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan\dfrac{\pi}{3}-\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan\dfrac{\pi}{3}\tan\dfrac{\theta}{2}}\\
&=\frac{\sqrt{3}-u}{2(1+\sqrt{3}u)}
\end{aligned}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}
(\triangle\mathrm{PGQ}\text{ の面積})&=\frac{1}{2}(\mathrm{PH}+\mathrm{QH})\mathrm{GH}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}+\frac{\sqrt{3}-u}{2(1+\sqrt{3}u)}\right)\cdot\frac{1}{2}\\
&=\frac{\sqrt{3}(1+u^2)}{8(1+\sqrt{3}u)}
\end{aligned}$$

(△PGQ の面積を求める際の別解 2)
△AGP において，正弦定理により，

$$\frac{\mathrm{GP}}{\sin\angle\mathrm{GAP}}=\frac{\mathrm{AP}}{\sin\angle\mathrm{AGP}}\iff\frac{\mathrm{GP}}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\frac{l(u)}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\iff\mathrm{GP}=\frac{l(u)}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

であり，

$$\mathrm{GQ}=\frac{\mathrm{GH}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}=\frac{1}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
(\triangle\mathrm{PGQ}\text{ の面積})&=\frac{1}{2}\mathrm{GP}\cdot\mathrm{GQ}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\\
&=\frac{1}{2}\times\frac{l(u)}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&=\frac{\sqrt{3}l(u)}{16\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}\\
&=\frac{\sqrt{3}l(u)}{16\tan\dfrac{\theta}{2}\cos^2\dfrac{\theta}{2}}\\
&=\frac{\sqrt{3}l(u)}{16\dfrac{u}{1+u^2}}\\
&=\frac{\sqrt{3}(1+u^2)}{8(1+\sqrt{3}u)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{別解}}$

AC と A$'$C$'$ の交点を R とおく．$\angle\mathrm{RAP} = \dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{APR} = \dfrac{2}{3}\pi - \theta$ より，$\angle\mathrm{ARP} = \theta$.
正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\sin\theta} = \frac{\mathrm{PR}}{\sin\frac{\pi}{3}} \iff \mathrm{PR} = \frac{\sqrt{3}\,l(u)}{2\sin\theta}$$

よって

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{APR} &= \frac{1}{2}\cdot l(u)\cdot\frac{\sqrt{3}\,l(u)}{2\sin\theta}\cdot\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}\{l(u)\}^2}{4\sin\theta}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}\{l(u)\}^2\left(\frac{\sqrt{3}}{\tan\theta}+1\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}\{l(u)\}^2\left(\frac{\sqrt{3}(1-u^2)}{2u}+1\right) \qquad \left(\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2u}{1-u^2}\text{ を用いた}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}\{l(u)\}^2\cdot\frac{(\sqrt{3}u+1)(\sqrt{3}-u)}{2u}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}\{l(u)\}^2\cdot\frac{\sqrt{3}-u}{l(u)}\\
&= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-u)l(u)}{8}
\end{aligned}$$

$S(u)$ は正三角形の面積から $\triangle\mathrm{APR}$ の 3 個分の面積を引けばよいので，

$$\begin{aligned}
S(u) &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3} - 3\triangle\mathrm{APR}\\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{3}-u)l(u)}{8}\\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8}\left\{2-(\sqrt{3}-u)l(u)\right\}\\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8}\left\{2-\frac{2u(\sqrt{3}-u)}{\sqrt{3}u+1}\right\}\\
&= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}(1+u^2)}{4(1+\sqrt{3}u)}}
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
S'(u) &= \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1+u^2}{1+\sqrt{3}u}\right)'\\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2u(1+\sqrt{3}u)-(1+u^2)\cdot\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3}u)^2}\\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{(u+\sqrt{3})(\sqrt{3}u-1)}{(1+\sqrt{3}u)^2}
\end{aligned}$$

であるから，$0 < u < \sqrt{3}$ に注意すると $S'(u) = 0 \iff u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であり，$S(u)$ の増減は次のようになる．

u	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$(\sqrt{3})$
$S'(u)$		$-$	0	$+$	
$S(u)$	$\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

したがって，$u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ すなわち $\theta = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

講評

問題 1［小問集合］((1) 易 (2) 標準 (3) 易 (4) 易 (5) 標準 (6) 標準 (7) 標準 (8) 易 (9) 標準 (10) やや難 (11) 標準)
昨年および 2020 年前期に比較して難問が少なくなった．
(7) では $\angle \mathrm{FPF}'$ の二等分線は曲線の接線になっているのだが，それを使わなくても容易に解ける．
(10) は階段の上り方を分類して数えあげると大変である．n 段上がる上がり方を a_n として隣接 4 項の漸化式で計算するのがよい．(11) では，解法の選択次第で作業量が大きく変わる．

問題 2［確率漸化式］（標準）今年度の AO 入試と前期入試に引き続いて，大問で確率が出題された．3 状態の確率漸化式の問題だが，状態遷移図を書いて立式すれば，$a_n + b_n + c_n = 1$ というヒントがあるので解くのは難しくない．

問題 3［三角形，数Ⅲの微積分］（難）図形の観察力がかなり必要とされる問題で，多くの受験生は最後までは手が出なかったと思われる．(3) までをしっかり解いておきたい．

小問集合は近年は難化傾向だったが，今回は穏やかな難易度で落とせない問題が多い．大問の難易度は，2019 年後期と同程度，2020 年前期よりやや難というところである．分量は多く制限時間内に解ききるのは難しいが，問題 1 で 11 題中 8〜9 題，問題 2 は完答に近いところまで，問題 3 は (3) まで，全体で 70% 強をとりたい．