

解答速報

藤田医科大学(前期) 数学

2020年1月23日実施

問題1

- (1) x と k を実数とする。 $3e^{2x} - 7e^x = 6$ であるとき、 $e^{kx} = 243$ を満たす k は である。
- (2) $\int_{-2}^2 (|2x - x^2| + x^2 + 2x + 2) dx = \frac{\text{イウ}}{\text{エ}}$ である。
- (3) $1 \leq y \leq 10 - \frac{(x-5)^2}{5}$ かつ $y \geq |x-5|$ を満たす整数の組 (x, y) は 組ある。
- (4) 複素数 z_1 と z_2 が $|z_1| = 1$, $|z_2| = 2$, $\arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{6}$ を満たす。
 k を実数としたとき、 $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{|z_1 + kz_2| - |z_1|}{k} = \sqrt{\text{キ}}$ である。
- (5) $\triangle ABC$ において $AB = 2$, $BC = 4$, $CA = 3$ とし、 BC 上の点 H が $AH \perp BC$ を満たすとする。このとき、
 $\vec{AH} = \frac{1}{\text{クケ}} (\text{コサ} \vec{AB} + \text{シス} \vec{AC})$ である。
- (6) $x^2 - 1 + 3 \cos 2\pi x = 0$ の実数解の個数は である。
- (7) 正の整数のうち2でも3でも割り切れない数を小さい数から順に並べて数列を作る。この数列の第2020項は であり、第1項から第2020項までの総和を S とおくと、 $\frac{S}{2020} = \text{テトナニ}$ である。
- (8) 円に内接する四角形 $ABCD$ において、 $AB = BC = CD = 18$, $DA = 46$ のとき、この円の半径は である。
- (9) 100人のテストの得点データを集計したところ、平均は80、分散は320であったが、100点を取った2名の結果が誤って0点と入力されていた。この2名のデータを0から100に修正すると、平均は となり、分散は となる。
- (10) 六進法で表された次の数の計算結果を九進法で表すと .₍₉₎ である。
 $51.3_{(6)} + 24.1_{(6)}$

解答

解答記号	正解
ア	5
$\frac{\text{イウ}}{\text{エ}}$	$\frac{64}{3}$
オカ	64
$\sqrt{\text{キ}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{\text{クケ}} (\text{コサ} \vec{AB} + \text{シス} \vec{AC})$	$\frac{1}{32} (21\vec{AB} + 11\vec{AC})$

解答記号	正解
セ	8
ソタチツ	6059
テトナニ	3030
ヌネ	27
ノハ	82
ヒフヘ	196
ホマ.ミ ₍₉₎	52.6 ₍₉₎

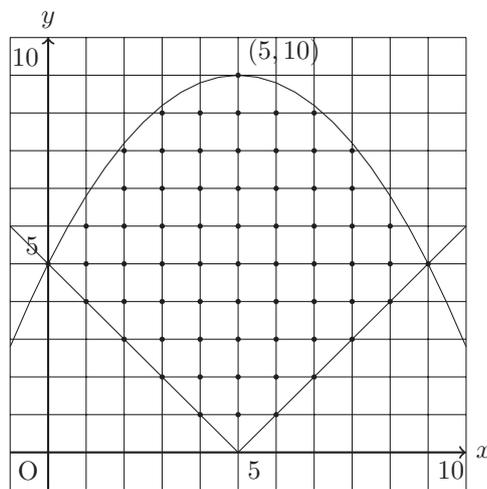
解説

(1) $3e^{2x} - 7e^x = 6 \iff (3e^x + 2)(e^x - 3) = 0$ であり, $3e^x + 2 > 0$ であるから, $e^x = 3$ がわかる. よって $e^{kx} = 243 \iff 3^k = 3^5$ となるので, $k = 5$ である.

(2)

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \int_{-2}^2 |x(2-x)| dx + 2 \int_0^2 (x^2 + 2) dx \\ &= \int_{-2}^0 \{-x(2-x)\} dx + \int_0^2 \{x(2-x)\} dx + 2 \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_0^2 \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 + \frac{40}{3} = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

(3) 与不等式の表す領域は下図のようになる. この領域内に含まれる格子点の数を数えればよく, その数は **64** 個である.



(4) 問題の条件より $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{1}{2}$, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{6}$ であることから,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right\} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \lim_{k \rightarrow 0} |z_2| \cdot \frac{\left| \frac{z_1}{z_2} + k \right| - \left| \frac{z_1}{z_2} \right|}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\left| \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i + k \right| - \frac{1}{2}}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\left| 2k + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right| - 1}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\left(2k + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} - 1}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4k^2 + 2\sqrt{3}k + 1} - 1}{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4k^2 + 2\sqrt{3}k + 1} - 1)(\sqrt{4k^2 + 2\sqrt{3}k + 1} + 1)}{k(\sqrt{4k^2 + 2\sqrt{3}k + 1} + 1)} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{4k^2 + 2\sqrt{3}k}{k(\sqrt{4k^2 + 2\sqrt{3}k + 1} + 1)} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{4k + 2\sqrt{3}}{\sqrt{4k^2 + 2\sqrt{3}k + 1} + 1} \\
 &= \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

となる.

別解 1

問題の条件より $z_2 = 2$ としても一般性を失わない, このとき, $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ となるので,

$$(\text{与式}) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 2k \right| - 1}{k}$$

となる. 以下は同様である.

別解 2

原点を $O(0)$ とし, $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_1 + kz_2)$ とすると, $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$ であることから, $\angle OAC = \frac{5}{6}\pi$ である. $OA = 1$, $AC = 2k$ であるから, 余弦定理により

$$\begin{aligned}
 |z_1 + kz_2|^2 &= OC^2 = 1^2 + (2k)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2k \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) \\
 &= 4k^2 + 2\sqrt{3}k + 1
 \end{aligned}$$

より $|z_1 + kz_2| = \sqrt{4k^2 + 2\sqrt{3}k + 1}$ となる. 以下は同様である.

(5) $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とする. $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$ であり, $BC = 4$ すなわち $|\vec{b} - \vec{c}| = 4$ の両辺を 2 乗することにより, $\vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{3}{2}$ も得られる.

H は直線 BC にあるので, $\overrightarrow{AH} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$ とおける. $AH \perp BC$ より

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \iff \{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \\
 &\iff (t-1)|\vec{b}|^2 + (1-2t)\vec{b} \cdot \vec{c} + t|\vec{c}|^2 = 0 \\
 &\iff 4(t-1) - \frac{3}{2}(1-2t) + 9t = 0 \\
 &\iff t = \frac{11}{32}
 \end{aligned}$$

となるので, $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{32} (21\overrightarrow{AB} + 11\overrightarrow{AC})$.

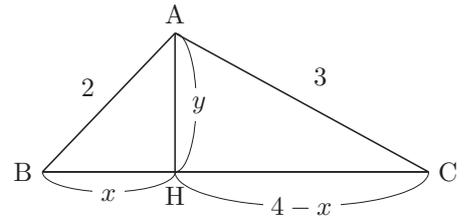
別解

右図のように x, y をとると、2つの直角三角形において三平方の定理を適用することにより、

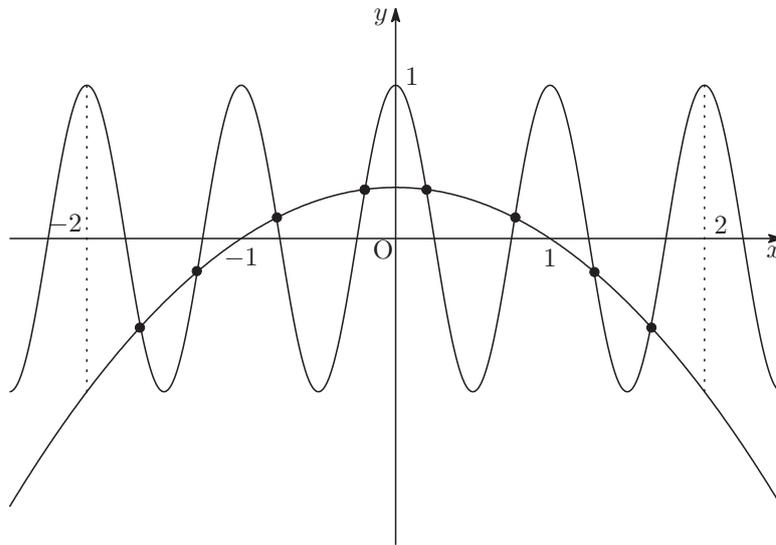
$$2^2 = x^2 + y^2, \quad 3^2 = (4-x)^2 + y^2$$

となる。これを解くと $x = \frac{11}{8}$ が得られるので、 $BH : CH = 11 : 21$ が分かる。したがって、

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{32} (21\overrightarrow{AB} + 11\overrightarrow{AC})$$



- (6) 与式は $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3} = \cos 2\pi x$ となる。2つのグラフ $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}$, $y = \cos 2\pi x$ は下図のようになり、共有点の個数が与方程式の実数解の個数であるから、**8** 個である。



- (7) この数列の各項を書き出してみると

$$1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$$

であり、「初項が1で公差が6の等差数列 $\{p_n\}$ 」と「初項が5で公差が6の等差数列 $\{q_n\}$ 」が交互に並ぶことが分かる。従って2020項は $q_{1010} = 5 + 6 \cdot 1009 = \mathbf{6059}$ 。また、2019項は $p_{1010} = 1 + 6 \cdot 1009 = 6055$ であるから、

$$\frac{S}{2020} = \frac{1}{2020} \left\{ \frac{1010(1 + 6055)}{2} + \frac{1010(5 + 6059)}{2} \right\} = \mathbf{3030}$$

別解

この数列を $\{a_n\}$ とすると、 $a_k + a_{2021-k}$ ($1 \leq k \leq 2020$) はすべて $a_1 + a_{2020} = 1 + 6059 = 6060$ に等しいので、 $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2020}$ と $S = a_{2020} + a_{2019} + \dots + a_1$ を加えると $2S = 6060 \times 2020$ になると分かる。したがって $\frac{S}{2020} = \mathbf{3030}$ 。

- (8) $\angle ABC = \theta$ とすると $\angle ADC = \pi - \theta$ である。三角形 ABC, ADC において余弦定理を適用すると、

$$\begin{aligned} AC^2 &= 18^2 + 18^2 - 2 \cdot 18 \cdot 18 \cdot \cos \theta \\ &= 46^2 + 18^2 - 2 \cdot 46 \cdot 18 \cdot \cos(\pi - \theta) \end{aligned}$$

となる。 $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ に注意するとこれより $\cos \theta = -\frac{7}{9}$ が得られる。また、

$$\sin \theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}, \quad AC = 24\sqrt{2}$$

も分かるので、求める円の半径を R とすると、正弦定理により

$$R = \frac{AC}{2 \sin \theta} = 27$$

別解 1

四角形 ABCD は等脚台形であるから、 $AC = BD = x$ とおいてトレミーの定理を用いると、

$$x^2 = 18 \cdot 18 + 18 \cdot 46 = 18 \cdot 64 \quad \text{より} \quad x = 24\sqrt{2}$$

が得られる。線分 AC の中点を M とすると

$$\cos \angle BAM = \frac{12\sqrt{2}}{18} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{より} \quad \sin \angle BAM = \sin \angle BAC = \frac{1}{3}$$

であるから、正弦定理により

$$R = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = 27$$

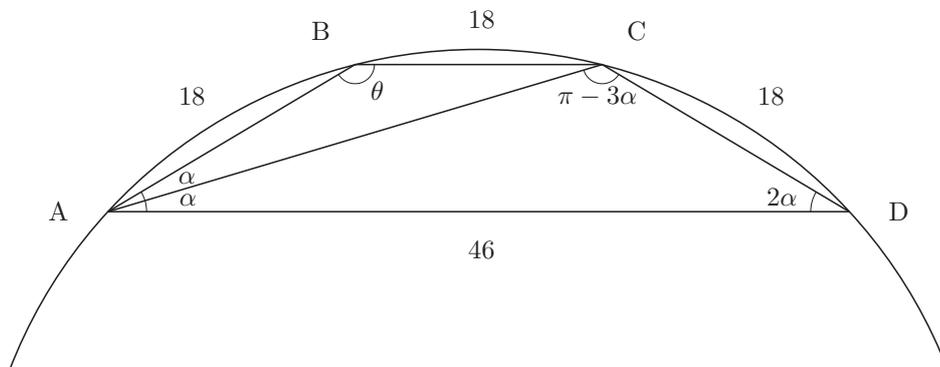
別解 2

等しい弦長に注意すると、下図のように角度 α がとれる。したがって正弦定理から

$$\frac{18}{\sin \alpha} = \frac{46}{\sin(\pi - 3\alpha)}$$

が成り立つ。 $\sin(\pi - 3\alpha) = \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ および $\sin \alpha > 0$ より、 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ が求まるので、正弦

定理から $R = \frac{18}{2 \sin \alpha} = 27$.



(9) 初めに集計した 100 人の得点を $\{x_k\}$ ($1 \leq k \leq 100$) とすると、与条件から

$$\frac{1}{100} \sum_{k=1}^{100} x_k = 80, \quad \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{100} x_k^2 - 80^2 = 320$$

である。これに対して 2 名の得点の修正を加えると、平均は

$$\frac{1}{100} \left(100 \times 2 + \sum_{k=1}^{100} x_k \right) = 2 + \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{100} x_k = 82$$

となり、また分散は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{100} \left(100^2 \times 2 + \sum_{k=1}^{100} x_k^2 \right) - 82^2 \\ &= 200 + \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{100} x_k^2 - 82^2 \end{aligned}$$

$$= 200 + (80^2 + 320) - 82^2$$

$$= \mathbf{196}$$

(10) まず与えられた数を10進法で表すと、

$$51.3_{(6)} + 24.1_{(6)} = \left(5 \times 6 + 1 + \frac{3}{6}\right) + \left(2 \times 6 + 4 + \frac{1}{6}\right) = 47 + \frac{2}{3}$$

となる.

$$47 = 5 \times 9 + 2 = 52_{(9)}$$

であり、また $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ より $\frac{2}{3} = 0.6_{(9)}$ であるので、答は $\mathbf{52.6_{(9)}}$ である.

問題2

袋の中に赤玉が2個、白玉が3個あり、袋の外に赤玉が2個、白玉が3個ある。「袋の中から玉を1個取り出して色を確認し、この玉を袋にもどし、さらに同色の玉が外にある場合は同色の玉1個を袋に追加し、ない場合は追加しない」という試行を繰り返す。次の問いに答えよ。

- (1) 2回目の試行後、袋の外に白玉が3個ある確率を求めよ。
- (2) 3回目の試行で白玉が取り出される確率を求めよ。
- (3) 試行を繰り返すとき、袋の外の赤玉が白玉より先になくなる確率を求めよ。

解答

- (1) 2回の試行でともに赤玉が取り出される確率なので、 $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{5}$
- (2) ●を赤玉、○を白玉とする。取り出される順番で場合分けをすると、

取り出される玉の順番	確率
●●○	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{35}$
○●○	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{35}$
●○○	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{35}$
○○○	$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{35}$

以上により、求める確率は $\frac{3+4+4+10}{35} = \frac{3}{5}$

- (3) まず袋の外の白玉が赤玉より先になくなる確率を求める。

取り出される玉の順番	確率
○○○	$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$
●○○○	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{14}$
○●○○	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{14}$
○○●○	$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{14}$

であるから、袋の外の白玉が赤玉より先になくなる確率は $\frac{2}{7} + \frac{1+1+1}{14} = \frac{1}{2}$ である。したがって、袋の外

の赤玉が白玉より先になくなる確率は $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ である。

別解

直接袋の外の赤玉が白玉より先になくなる確率を求めると次のようになる。

取り出される玉の順番	確率
●●	(1) より $\frac{1}{5}$
●○●	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{35}$
○●●	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{35}$
○○●●	$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{70}$
○●○●	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{70}$
●○○●	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{70}$

以上により、求める確率は $\frac{1}{5} + \frac{3+3}{35} + \frac{3+3+3}{70} = \frac{1}{2}$ である.

問題3

xy 座標平面上の楕円 $C: x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ の $y > 0$ の範囲にある焦点を F , $y < 0$ の範囲にある焦点を F' とする。焦点 F を通り傾きが m の直線 l と楕円 C との2つの交点をそれぞれ A, B とする。直線 l と楕円 C で囲まれた2つの部分のうち、 F' を含まない部分を D とする。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 l の方程式を求めよ。
- (2) 線分 AB の長さを m を用いて表せ。
- (3) $AF' + F'B$ の最大値を求めよ。
- (4) $AF' + F'B$ が最大になるときの D の面積を求めよ。
- (5) $m = \sqrt{3}$ のとき、 D を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

解答

- (1) 焦点は $F(0, \sqrt{3})$, $F'(0, -\sqrt{3})$ となるので、直線 l は $y = mx + \sqrt{3}$ である。
- (2) (1) と楕円 C の方程式を連立すると

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \iff (m^2 + 4)x^2 + 2\sqrt{3}mx - 1 = 0 \dots \textcircled{1}$$

である。この解を α, β とおくと解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = \frac{-2\sqrt{3}m}{m^2 + 4}, \quad \alpha\beta = \frac{-1}{m^2 + 4}$$

となるので、

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \left(\frac{-2\sqrt{3}m}{m^2 + 4}\right)^2 + \frac{4}{m^2 + 4} \\ &= \frac{16(m^2 + 1)}{(m^2 + 4)^2} \end{aligned}$$

となる。直線 AB の傾きが m であることを考慮すると、

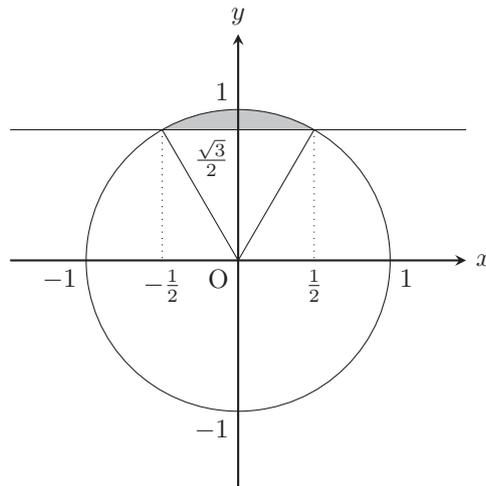
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{m^2 + 1}|\beta - \alpha| \\ &= \sqrt{m^2 + 1} \cdot \frac{4\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 + 4} \\ &= \frac{4(m^2 + 1)}{m^2 + 4} \end{aligned}$$

- (3) $AF + AF' = 4$, $BF + BF' = 4$ が成り立つので、 $AF + AF' + BF + BF' = 8$ から $AF' + BF' = 8 - AB$ である。よって、

$$\begin{aligned} AF' + BF' &= 8 - \frac{4(m^2 + 1)}{m^2 + 4} \\ &= 8 - \frac{4(m^2 + 4) - 12}{m^2 + 4} \\ &= 4 + \frac{12}{m^2 + 4} \end{aligned}$$

となるので、 $m = 0$ のとき最大値 **7** である。

- (4) y 方向に $\frac{1}{2}$ 倍縮小した図形、すなわち、円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を考える。

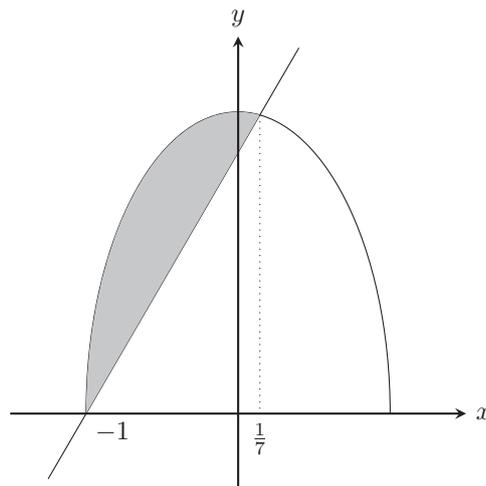


図の灰色部分の面積は、 $\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$ となるので、もとの図形の面積はこれを 2 倍して $\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$ である.

(5) まず、交点を求める. $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ と楕円を連立すると①より

$$7x^2 + 6x - 1 = 0$$

となるので、これを解いて $x = -1, \frac{1}{7}$ である.



求める体積は,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{\frac{1}{7}} 4\pi(1-x^2) dx - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{8\sqrt{3}}{7}\right)^2 \pi \cdot \frac{8}{7} \\ &= \left[4\pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \right]_{-1}^{\frac{1}{7}} - \frac{512}{7^3} \pi \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3 \cdot 7^3} + 1 - \frac{1}{3} - \frac{128}{7^3} \right) \\ &= 4\pi \left(\frac{17}{21} - \frac{385}{3 \cdot 7^3} \right) \\ &= 4\pi \left(\frac{119}{147} - \frac{55}{147} \right) \\ &= \frac{256}{147} \pi \end{aligned}$$

講評

問題1 [小問集合] ((1) 易 (2) 易 (3) やや難 (4) やや難 (5) 標準 (6) 標準 (7) やや難 (8) 標準 (9) 標準 (10) 標準)

小問集で穴埋めではあるがかなりの計算量を必要とする問題も含んでおり、穴埋めに徹して要領よく解かないと時間を消費してしまうだろう。

(3) グラフを描いて x ごとに数え上げる。

(4) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = 2$ と決め打ちしてしまうと楽。

(7) $a_1 + a_2 + \dots + a_{2020}$ と $a_{2020} + a_{2019} + \dots + a_1$ を足す、といった工夫をするとすぐに求まる。

(8) 等脚台形であることから、トレミーの定理を使って対角線を出すと速い。

出来ない問題はどんどん後回しにしてできる問題で稼げるだけ稼ぐべきである。

問題2 [確率] (標準) 今年度の AO 入試に引き続いて、袋の中から玉を取り出す問題が出題されたが、難易度的には高くはない。玉を出し入れする過程で赤玉と白玉が袋の中にそれぞれ何個ずつあるのか、という情報をしっかり整理しながら解き進めていけば完答することは難しくないだろう。

問題3 [だ円, 回転体の体積] (標準) だ円と2点で交わる直線についての問題。(3) でだ円の定義を利用して $AF' + BF'$ を m で表せたかどうかで差がつくだろう。(5) の体積は、煩雑な分数計算は後回しにした方が総得点の期待値が上がるかも知れない。

ここ数年と比較すると問題2と3の難易度は穏やかであるが、問題1の小問集合は分量が非常に多く、またマーク式であるがゆえに得点しにくいだろう。制限時間内に解ききるのは非常に厳しい。目標は、問題1で半分強、問題2と3で70%、全体で60%強というところ。

メルマガ無料登録で全教科配信! 本解答速報の内容に関するお問合せはメビオ ☎0120-146-156 まで

☎ 03-3370-0410

受付時間 8~20時 土日祝可

<https://yms.ne.jp/>

東京都渋谷区代々木 1-37-14



☎ 0120-146-156

携帯からOK 受付時間 9~21時 土日祝可

<https://www.mebio.co.jp/>

大阪市中央区石町2-3-12ベルヴォア天満橋