医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ

解答速報

大阪医科大学（後期）　数学

2020年 3月10日実施

〔1〕 n を 2 以上の自然数とする。1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚のカードをよく混ぜ，1 枚取り出し，それを戻さずにもう 1 枚取り出す。

(1) 1 枚目に取り出したカードの番号より 2 枚目の番号の方が小さい確率を求めよ。

(2) 1 枚目に取り出したカードの番号より 2 枚目の番号の方が小さいという条件の下で，2 枚目の番号が 1 である確率を求めよ。

解答

事象 X が起こる確率を $P(X)$ などと表す．

(1) 「1 枚目に取り出したカードの番号より 2 枚目の番号の方が小さい」という事象を A とする．カードを 2 枚取り出すとき，全ての取り出し方は ${}_n\mathrm{P}_2 = n(n-1)$ 通り，A が起こる取り出し方は ${}_n\mathrm{C}_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 通りある．よって

$$P(A) = \frac{\dfrac{n(n-1)}{2}}{n(n-1)} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) 「2 枚目の番号が 1 である」という事象を B とする．$A \cap B$ が起こるとき，1 枚目は $2, 3, \cdots, n$ の $n-1$ 通りあるから $P(A \cap B) = \dfrac{n-1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n}$ となる．よって求める条件付き確率を $P_A(B)$ とすると

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{2}{n}}$$

〔2〕 2 つの曲線 $C_1 : y = x^2 - \dfrac{3}{2}$ と $C_2 : y^2 = -2x + \dfrac{9}{4}$ を考える。

(1) C_1, C_2 の共有点をすべて求めよ。

(2) 2 つの領域 $y \geqq x^2 - \dfrac{3}{2}$ と $y^2 \leqq -2x + \dfrac{9}{4}$ の共通部分 W の面積 S を求めよ。

解答

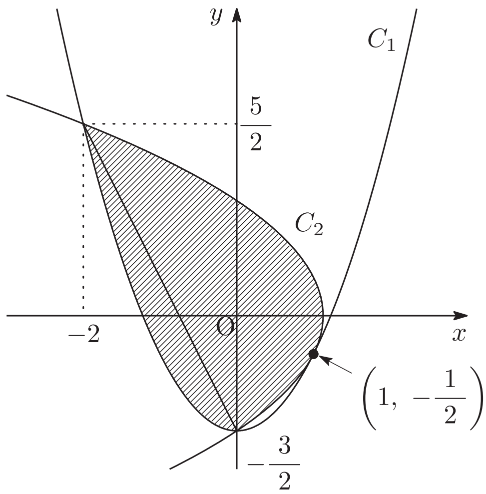
(1) C_1, C_2 の方程式から y を消去すると，

$$\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 = -2x + \frac{9}{4} \iff x^4 - 3x^2 + 2x = 0$$
$$\iff x(x-1)^2(x+2) = 0$$
$$\iff x = 0,\ 1,\ -2$$

これより共有点の座標は

$$\boldsymbol{\left(0,\ -\frac{3}{2}\right),\ \left(1,\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(-2,\ \frac{5}{2}\right)}$$

(2) (1) から $x = 1$ は 2 重解であることから，その周辺での C_1, C_2 の上下関係も分かるので，領域 W は図の斜線部となる（境界上の点を含む）．2 点 $\left(0,\ -\dfrac{3}{2}\right)$，$\left(-2,\ \dfrac{5}{2}\right)$ を結ぶ直線 ℓ で領域を分割する．この直線 ℓ の方程式を $y = y_\ell(x)$ および $x = x_\ell(y)$ と表し，C_1, C_2 の方程式をそれぞれ $y = f_1(x)$, $x = f_2(y)$ と表すことにすると，



$$S = \int_{-2}^{0} \{y_\ell(x) - f_1(x)\}\,dx + \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \{f_2(y) - x_\ell(y)\}\,dy$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \{0 - (-2)\}^3 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{\frac{5}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)\right\}^3$$
$$= \boldsymbol{\frac{20}{3}}$$

〔3〕 $a,\ b$ を正の整数とし，関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases} x^a\sin\dfrac{1}{x^b} & (x\neq 0\ のとき) \\ 0 & (x=0\ のとき) \end{cases}$$

(1) $f(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ。

(2) $a\geqq 2$ のとき $f(x)$ はすべての x で微分可能であることを示し，導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3) $a\geqq b+3$ のとき $f'(x)$ は $x=0$ で微分可能であることを示し，$f''(0)$ の値を求めよ。

解答

(1) $x\neq 0$ のとき $\left|\sin\dfrac{1}{x^b}\right|\leqq 1$ であるから，

$$0\leqq\left|x^a\sin\frac{1}{x^b}\right|\leqq|x^a|$$

が成り立つ．ここで，

$$\lim_{x\to 0}|x^a|=0$$

であることから，はさみうちの原理により，

$$\lim_{x\to 0}\left|x^a\sin\frac{1}{x^b}\right|=0$$

がわかる．したがって，

$$\lim_{x\to 0}x^a\sin\frac{1}{x^b}=0\cdots①$$

より

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x^a\sin\frac{1}{x^b}=0=f(0)$$

が成り立つので $f(x)$ は $x=0$ で連続である． (証明終)

(2) $x\neq 0$ のとき，$f(x)$ が微分可能であることは明らかで，

$$\begin{aligned} f'(x)&=ax^{a-1}\sin\frac{1}{x^b}+x^a\cos\frac{1}{x^b}\cdot\left(-b\cdot\frac{1}{x^{b+1}}\right) \\ &=ax^{a-1}\sin\frac{1}{x^b}-bx^{a-b-1}\cos\frac{1}{x^b} \end{aligned}$$

である．また，

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{x^a\sin\dfrac{1}{x^b}-0}{x} \\ &=\lim_{x\to 0}x^{a-1}\sin\frac{1}{x^b} \end{aligned}$$

であるが，$a\geqq 2$ より $a-1\geqq 1$ であることから，①によりこの極限値は 0 であることがわかる．したがって，$f(x)$ は $x=0$ において微分可能であり，$f'(0)=0$ である． (証明終)

以上により，導関数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{f'(0)=0} \\ \boldsymbol{f'(x)=ax^{a-1}\sin\dfrac{1}{x^b}-bx^{a-b-1}\cos\dfrac{1}{x^b}\quad(x\neq 0)} \end{cases}$$

(3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^{a-1}\sin\dfrac{1}{x^b}-bx^{a-b-1}\cos\dfrac{1}{x^b}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(a x^{a-2} \sin \frac{1}{x^b} - b x^{a-b-2} \cos \frac{1}{x^b} \right) \cdots ②$$

である．ここで条件より $a-b-2 \geqq 1$ が成り立つこと，および $x \neq 0$ のとき $\left| \cos \frac{1}{x^b} \right| \leqq 1$ が成り立つことから (1) と同様の議論（はさみうちの原理）により

$$\lim_{x \to 0} x^{a-b-2} \cos \frac{1}{x^b} = 0$$

がわかり，また，$a-2 \geqq b+1 > 1$ より①から

$$\lim_{x \to 0} x^{a-2} \sin \frac{1}{x^b} = 0$$

もわかるので，

$$② = 0$$

となる．したがって $f'(x)$ は $x=0$ において微分可能であり，$\boldsymbol{f''(0)=0}$ である．　（証明終）

〔4〕 $p,\ q$ を素数とし $p \neq q$ とする。

(1) $p^x = q^y$ を満たす有理数 $x,\ y$ を求めよ。

(2) $\log_p q$ は無理数であることを示せ。

(3) $a,\ b,\ c,\ d$ を 0 でない有理数とし， $m = p^a q^b$ ， $n = p^c q^d$ とする。 $\log_m n$ が有理数であるための $a,\ b,\ c,\ d$ の条件を求め，そのときの $\log_m n$ の値を $a,\ b,\ c,\ d$ を用いて表せ。

解答

(1) $x = \dfrac{i}{j}$，$y = \dfrac{k}{l}$ とおくと（i，k は整数，j，l は 0 でない整数）.

$$p^x = q^y \iff p^{\frac{i}{j}} = q^{\frac{k}{l}}$$

両辺を jl 乗すると，

$$p^{il} = q^{jk}$$

$il > 0$ とすると $p^{il} = q^{jk}$ は 1 より大きい自然数となるが，素因数分解の一意性よりこのような $(il,\ jk)$ の組は存在しない.

$il < 0$ とすると $p^{-il} = q^{-jk}$ は 1 より大きい自然数となるが，素因数分解の一意性よりこのような $(-il,\ -jk)$ の組は存在しない.

$il = 0$ とすると $p^{jl} = q^{jk} = 1$ であり $il = jk = 0$ である.

したがって，$il = jk = 0$ すなわち $i = k = 0$ しか解は存在しないので，求める有理数 $x,\ y$ は $\boldsymbol{(x,\ y) = (0,\ 0)}$ のみである.

(2) $\log_p q = x$ とおくと，$p^x = q^1$ であるが，x を有理数とすると (1) の解が $(x,\ y) = (0,\ 0)$ 以外に存在することになり矛盾する．したがって x は無理数である.

(3) $\log_m n = r$ とおくと，

$$m^r = n \iff p^{ar} q^{br} = p^c q^d$$
$$\iff p^{ar-c} = q^{d-br}$$

r が有理数であるならば，(1) より $ar - c = d - br = 0$ から $\dfrac{c}{a} = \dfrac{d}{b}$ すなわち $ad - bc = 0$ が必要である.

逆に，$ad - bc = 0$ のとき，

$$n = (p^a)^{\frac{c}{a}} (q^b)^{\frac{d}{b}} = (p^a)^{\frac{c}{a}} (q^b)^{\frac{c}{a}} = m^{\frac{c}{a}}$$

より $\log_m n = \dfrac{c}{a}$ となって十分である.

したがって求める条件は，$\boldsymbol{ad - bc = 0}$ であり，

$\boldsymbol{\log_m n = \dfrac{c}{a} \left(= \dfrac{d}{b} \right)}$ である.

別解

$$\begin{aligned} \log_m n &= \frac{\log_p n}{\log_p m} \\ &= \frac{c + d\log_p q}{a + b\log_p q} \\ &= \frac{d}{b} + \frac{bc - ad}{b(a + b\log_p q)} \end{aligned}$$

である．(2) より $b(a+b\log_p q)$ は無理数なので $\log_m n$ が有理数となる条件は $\boldsymbol{bc-ad=0}$ である（注釈参照）．このとき，$\boldsymbol{\log_m n=\dfrac{d}{b}\left(=\dfrac{c}{a}\right)}$ となる．

注釈

ここでは以下の補題を利用した．

補題　a を有理数，x を無理数としたとき，$\dfrac{a}{x}$ が有理数となる条件は $a=0$ である．

証明　$\dfrac{a}{x}=b$ とおく．$a\fallingdotseq 0$ と仮定すると $b\fallingdotseq 0$ であり，$x=\dfrac{a}{b}$ となって x が無理数であることに矛盾する．したがって $a=0$ である．　（証明終）

〔5〕 2つの合同な直円錐 U, V よりなる立体 W がある。U, V は頂点 O を共有し，それぞれの底面の円 A, B はただ1点 M を共有していて母線 OM のみが U, V の共通部分である。また，A, B の中心を A, B とすると，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$ であり，$\angle\mathrm{AOM} = \angle\mathrm{BOM} = \alpha\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}\right)$ である。
この立体 W を水平面 π 上に横たえる。π と U, V それぞれの共通部分の O を通る直線を l, m とする。A, B から l, m に下ろした垂線の足を $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$ とし，$\angle\mathrm{A_1OB_1} = 2\theta$ とする。
なお，以下の問いに答える際に，4点 O, A, M, B が同一平面上にあることと，$\mathrm{AA_1}$, $\mathrm{BB_1}$ が水平面 π に垂直であることは証明しなくて良い。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を α を用いて表せ。
(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}$ を α, θ を用いて表せ。
(3) $\sin\theta$ を α で表せ。

解答

(1) $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$，$\angle\mathrm{AOB} = 2\angle\mathrm{AOM} = 2\alpha$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 1\cdot 1\cdot\cos 2\alpha = \boldsymbol{\cos 2\alpha}$$

(2) $\angle\mathrm{A_1OA} = \alpha$，$\angle\mathrm{AA_1O} = \dfrac{\pi}{2}$ なので，$|\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}| = \mathrm{OA}\cos\alpha = \cos\alpha$. 同様にして，$|\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}| = \cos\alpha$ が得られる.
これと $\angle\mathrm{A_1OB_1} = 2\theta$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB_1}} = \cos\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\theta = \boldsymbol{\cos^2\alpha\cos 2\theta}$$

(3) 図より，$\mathrm{A_1B_1} = \mathrm{AB} = 2\sin\alpha$.
$\triangle\mathrm{OA_1B_1}$ は $\mathrm{OA_1} = \mathrm{OB_1} = \cos\alpha$，$\mathrm{A_1B_1} = 2\sin\alpha$ の二等辺三角形になるので，点 O から辺 $\mathrm{A_1B_1}$ に下ろした垂線の足を H とすると，$\angle\mathrm{A_1OH} = \theta$ であることから，

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{A_1H}}{\mathrm{A_1O}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \boldsymbol{\tan\alpha}$$

別解1

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + \overrightarrow{\mathrm{A_1A}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB_1}} + \overrightarrow{\mathrm{B_1B}}$ であることを利用して，

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \cos 2\alpha\\
\iff\ &(\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + \overrightarrow{\mathrm{A_1A}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB_1}} + \overrightarrow{\mathrm{B_1B}}) = \cos 2\alpha\\
\iff\ &\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB_1}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B_1B}}\\
&\ + \overrightarrow{\mathrm{A_1A}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB_1}} + \overrightarrow{\mathrm{A_1A}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B_1B}} = \cos 2\alpha\\
\iff\ &\cos^2\alpha\cos 2\theta + 0 + 0 + |\overrightarrow{\mathrm{A_1A}}||\overrightarrow{\mathrm{B_1B}}|\cos 0 = \cos 2\alpha\\
\iff\ &\cos^2\alpha\cos 2\theta + \sin^2\alpha = \cos 2\alpha\\
\iff\ &\cos^2\alpha(1 - 2\sin^2\theta) + \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\\
\iff\ &-2\cos^2\alpha\sin^2\theta = -2\sin^2\alpha
\end{aligned}$$

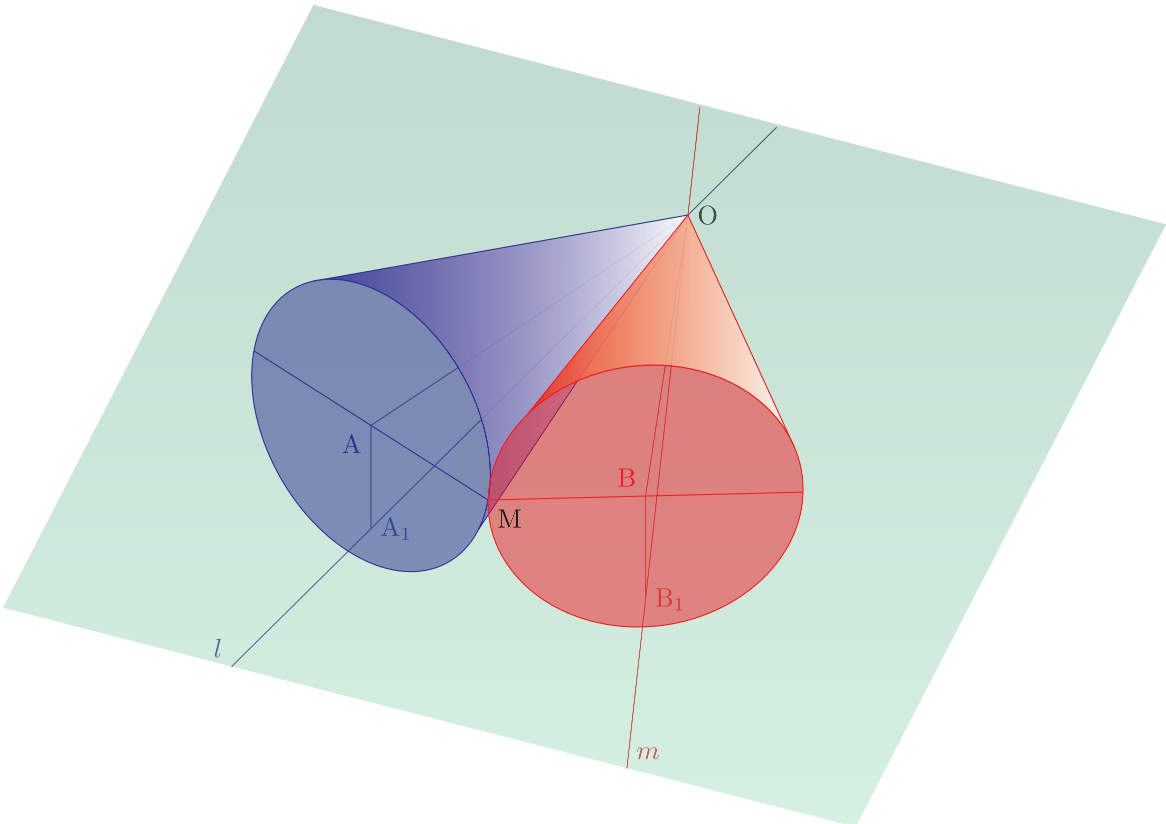
$\cos^2\alpha \fallingdotseq 0$ より，$\sin^2\theta = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha$.
$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ より，$\sin\theta > 0$，$\tan\alpha > 0$. したがって，$\sin\theta = \boldsymbol{\tan\alpha}$.

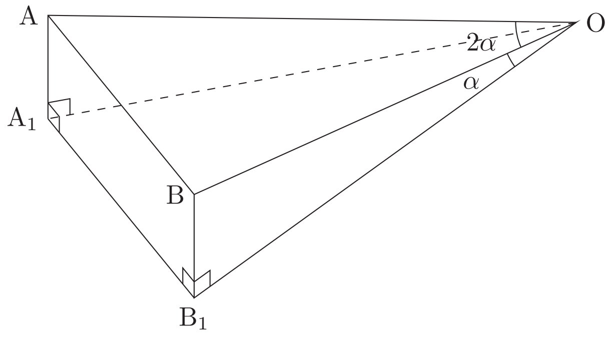
$\boxed{\text{別解 2}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}|$ より，

$$
\begin{aligned}
& |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}|^2 \\
\iff\ & |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB_1}} + |\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}|^2 \\
\iff\ & 1 - 2\cos 2\alpha + 1 = \cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha\cos 2\theta + \cos^2\alpha \\
\iff\ & 1 - \cos 2\alpha = \cos^2\alpha(1 - \cos 2\theta) \\
\iff\ & 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha\cdot 2\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

(以降別解 1 と同じ)





講評

〔1〕［確率］（易）ごく基本的な問題である．(2) の条件つき確率も易しく，落とせない．

〔2〕［放物線］（やや易）軸が直交する 2 つの放物線を境界とする領域についての問題．(2) の面積では，うまく分割して $\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ の公式を利用したい．

〔3〕［数Ⅲの微分］（難）関数の連続性・微分可能性について議論する問題．定義をしっかり押さえられてないと手が付かないだろう．厳密な議論が必要とされるところもあり，完答は困難と思われる．

〔4〕［整数］（やや難）素因数分解の一意性を用いる証明問題．この手の証明に慣れていないと手が付きにくいだろう．

〔5〕［空間図形］（標準）設定はそう難しくなく，題意がとれれば完答も可能な問題だが，問題文が長いために正確に状況を把握出来なかった受験生が多かったかも知れない．大きく差がつきそうな問題である．

2019 年後期，2020 年前期よりやや難化した．〔1〕,〔2〕は完答したいが,〔3〕～〔5〕はどれも手が付きにくい設問が含まれており完答は難しいだろう．目標は 60%.