医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ

解答速報

大阪医科大学（前期）　数学

2020年 2月11日実施

〔1〕 $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ を一辺の長さ 1 の正三角形の頂点とし，P_0 を辺 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1$ 上の点として $\mathrm{A}_0\mathrm{P}_0 = a_0\ (0 < a_0 < 1)$ とする。さらに，k を自然数として，

$$\mathrm{A}_n = \begin{cases} \mathrm{A}_0 & n = 3k \text{ のとき} \\ \mathrm{A}_1 & n = 3k+1 \text{ のとき} \\ \mathrm{A}_2 & n = 3k+2 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める。辺 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ 上の点 P_{n-1} が定まったとき，P_{n-1} から辺 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ に下ろした垂線の足を P_n と決め，$\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n = a_n$ とする。

(1) a_n を a_{n-1} で表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

解答

(1) 三角形 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n$ において，$\angle\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n = \dfrac{\pi}{3}$ であることより，$a_n = (1-a_{n-1})\cos\dfrac{\pi}{3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}(1-a_{n-1})}$.

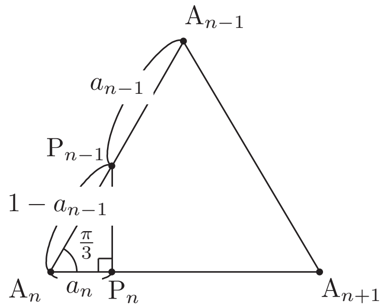
(2) (1) の漸化式を変形すると

$$a_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_{n-1} - \frac{1}{3}\right)$$

よって

$$a_n = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(a_0 - \frac{1}{3}\right)$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$.



〔2〕 $\triangle$ABC において $\angle A = \dfrac{\pi}{2}$，BC $= 1$，$\angle B = \theta$ とし，面積を S，辺の長さの和を l とする。また $\triangle$ABC を辺 BC の周りに 1 回転させてできる回転体 W の体積を V とする。

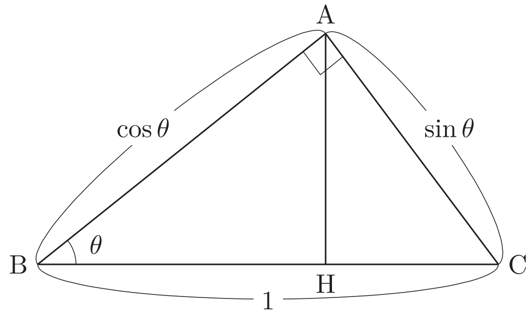
(1) V を θ を用いて表せ。

(2) $\dfrac{V}{Sl}$ が最大となるときの θ を定めよ。

解答

(1) 与条件から AB $= \cos\theta$，AC $= \sin\theta$ である．また点 A から辺 BC に下ろした垂線と BC との交点を H とすると，

$$\mathrm{AH} = \mathrm{AB}\sin\theta = \sin\theta\cos\theta$$



したがって

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\cdot\pi\mathrm{AH}^2\cdot\mathrm{BC} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\pi\sin^2\theta\cos^2\theta\cdot 1 \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{3}\sin^2\theta\cos^2\theta} \end{aligned}$$

(2) $l = 1 + \sin\theta + \cos\theta$ であり，また

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

であるから，

$$\begin{aligned} \frac{V}{Sl} &= \frac{\frac{\pi}{3}\sin^2\theta\cos^2\theta}{\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta+\cos\theta)} \\ &= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta} \end{aligned}$$

ここで $t = \sin\theta + \cos\theta$ とおくと，$t^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$ より $2\sin\theta\cos\theta = t^2 - 1$ なので,

$$\begin{aligned} \frac{V}{Sl} &= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{t^2-1}{1+t} \\ &= \frac{\pi}{3}(t-1) \end{aligned}$$

となる．$t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ と変形でき，題意から

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \iff \frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$$

なので，$\dfrac{V}{Sl}$ が最大となるのは $\theta + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$ のときである.

〔3〕 m を 4 以上の自然数とする。赤玉 m 個と青玉 m 個の計 $2m$ 個の玉を袋に入れる。袋から玉を 1 個ずつ続けて 4 個取り出す。最初の 2 個の玉を取り出したとき赤玉と青玉が同数という事象を A とする。4 個の玉を取り出したとき赤玉と青玉が同数という事象を B とする。以下では事象 A が起こる確率を $P(A)$ などと表す。

(1) 確率 $P(A)$, $P(B)$ をそれぞれ m で表せ。

(2) 確率 $P(A\cap B)$ を m で表せ。

(3) 事象 A も B も起こらない確率を m で表せ。

解答

(1) 事象 A は「同時に 2 個取り出して赤玉 1 個，青玉 1 個が取り出される」事象でもあるから，その確率は

$$P(A)=\frac{{}_m\mathrm{C}_1\cdot{}_m\mathrm{C}_1}{{}_{2m}\mathrm{C}_2}=\frac{m^2}{\dfrac{2m(2m-1)}{2}}=\boldsymbol{\frac{m}{2m-1}}$$

また，事象 B は「同時に 4 個取り出して赤玉 2 個，青玉 2 個が取り出される」事象でもあるから，その確率は

$$P(B)=\frac{{}_m\mathrm{C}_2\cdot{}_m\mathrm{C}_2}{{}_{2m}\mathrm{C}_4}=\frac{\left\{\dfrac{m(m-1)}{2}\right\}^2}{\dfrac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\boldsymbol{\frac{3m(m-1)}{2(2m-1)(2m-3)}}$$

(2) 事象 $A\cap B$ は「最初の 2 個で赤玉と青玉が 1 個ずつ取り出され，そのあとの 2 個で赤玉と青玉が 1 個ずつ取り出される」事象であるから，その確率は

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)\cdot\frac{{}_{m-1}\mathrm{C}_1\cdot{}_{m-1}\mathrm{C}_1}{{}_{2m-2}\mathrm{C}_2}\\&=\frac{m}{2m-1}\cdot\frac{(m-1)^2}{\dfrac{(2m-2)(2m-3)}{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{m(m-1)}{(2m-1)(2m-3)}}\end{aligned}$$

(3) 事象 A の余事象を $\overline{A}$ などと表すことにすると，求める確率は，

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\cap\overline{B})&=P(\overline{A\cup B})\\&=1-P(A\cup B)\\&=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}\\&=1-\left(\frac{m}{2m-1}+\frac{3m(m-1)}{2(2m-1)(2m-3)}-\frac{m(m-1)}{(2m-1)(2m-3)}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{3(m-1)(m-2)}{2(2m-1)(2m-3)}}\end{aligned}$$

別解

事象 A も B も起こらないのは次の場合である．

(i) 最初の 2 個で赤玉が 2 個取り出され, $\underline{\text{そのあとの 2 個で赤玉が 2 個取り出されるか赤玉と青玉が 1 個ずつ取り出される}}_{①}$.

(ii) 最初の 2 個で青玉が 2 個取り出され, $\underline{\text{そのあとの 2 個で青玉が 2 個取り出されるか赤玉と青玉が 1 個ずつ取り出される}}_{②}$.

最初の 2 個で赤玉あるいは青玉が 2 個取り出される確率は $1-P(A)=1-\dfrac{m}{2m-1}=\dfrac{m-1}{2m-1}$ である．また，

- 下線部 ① の余事象は「そのあとの 2 個で青玉が 2 個取り出される」事象
- 下線部 ② の余事象は「そのあとの 2 個で赤玉が 2 個取り出される」事象

なので，①，②の確率はともに $1-\dfrac{{}_{m}\mathrm{C}_2}{{}_{2m-2}\mathrm{C}_2}=1-\dfrac{\dfrac{m(m-1)}{2}}{\dfrac{(2m-2)(2m-3)}{2}}=\dfrac{3(m-2)}{2(2m-3)}$ である．したがって求める確率は

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{m-1}{2m-1}\cdot\frac{3(m-2)}{2(2m-3)}=\boldsymbol{\frac{3(m-1)(m-2)}{2(2m-1)(2m-3)}}$$

である．

〔4〕 $a,\ b,\ c$ はいずれも正の有理数とする。

(1) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が有理数ならば，$\sqrt{a}$ も $\sqrt{b}$ も有理数であることを示せ。

(2) $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ が有理数ならば，$\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c}$ のいずれも有理数であることを示せ。

解答

(1) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=p \iff \sqrt{b}=p-\sqrt{a}$ とおき，両辺を 2 乗すると，

$$b=p^2-2p\sqrt{a}+a \iff 2p\sqrt{a}=p^2+a-b$$

である．明らかに $p>0$ なので，

$$\sqrt{a}=\frac{p^2+a-b}{2p}$$

となるが，右辺は有理数なので $\sqrt{a}$ も有理数である．

$\sqrt{b}$ が有理数であることも同様に示すことができる． (証明終)

(2) $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=q \iff \sqrt{b}+\sqrt{c}=q-\sqrt{a}$ とおき，両辺を 2 乗すると，

$$b+2\sqrt{bc}+c=q^2-2q\sqrt{a}+a \iff 2\sqrt{bc}+2q\sqrt{a}=q^2+a-b-c$$

である．明らかに $q>0$ なので，

$$\sqrt{\frac{bc}{q^2}}+\sqrt{a}=\frac{q^2+a-b-c}{2q}$$

となるが，右辺は有理数なので $\sqrt{\frac{bc}{q^2}}+\sqrt{a}$ も有理数である．さらに，$\frac{bc}{q^2}$ も a も有理数なので (1) より $\sqrt{a}$ も有理数である．

$\sqrt{b}$ と $\sqrt{c}$ が有理数であることも同様に示すことができる． (証明終)

別解

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ が有理数だが $\sqrt{a}$ が有理数ではないものとして矛盾を導こう．

4 次方程式

$$f(x)=(x-\sqrt{b}-\sqrt{c})(x-\sqrt{b}+\sqrt{c})(x+\sqrt{b}-\sqrt{c})(x+\sqrt{b}+\sqrt{c})=0$$

を考える．展開すると

$$\begin{aligned}f(x)&=\{(x-\sqrt{b})^2-c\}\{(x+\sqrt{b})^2-c\}\\&=(x^2+b-c-2\sqrt{b}x)(x^2+b-c+2\sqrt{b}x)\\&=(x^2+b-c)^2-4bx^2\end{aligned}$$

なので $f(x)$ は有理数係数の多項式である．また $r=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$（有理数） とすると $\sqrt{b}+\sqrt{c}=r-\sqrt{a}$ なので $f(r-\sqrt{a})=0$ が成り立っている．有理数係数の整方程式が $r-\sqrt{a}$ を解に持つ場合，$r+\sqrt{a}$ も解に持つはずであるが，$f(r+\sqrt{a})>0$ なので解にならない．これは矛盾である． (証明終)

〔5〕 n を 0 以上の整数として，次のようにおく。

$$c_n(x)=\int_0^x t^n\cos t\,dt,\ s_n(x)=\int_0^x t^n\sin t\,dt,\ f_n(x)=\int_0^x t^n\cos(x-t)dt$$

(1) $n\geqq 1$ のとき，$c_n(x)$，$s_n(x)$ を $c_{n-1}(x)$，$s_{n-1}(x)$ を用いて表せ。

(2) $n\geqq 2$ のとき，$f_n(x)$ を $f_{n-2}(x)$ を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\int_0^x h(t)\cos(x-t)dt=x^3$ を満たす多項式 $h(t)$ があれば，その一例を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) 部分積分を行うことにより，

$$\begin{aligned}c_n(x)&=\Big[t^n\sin t\Big]_0^x-\int_0^x nt^{n-1}\sin tdt\\&=\boldsymbol{x^n\sin x-ns_{n-1}(x)}\end{aligned}$$

また，同様にして

$$\begin{aligned}s_n(x)&=\Big[t^n(-\cos t)\Big]_0^x-\int_0^x nt^{n-1}(-\cos t)dt\\&=\boldsymbol{-x^n\cos x+nc_{n-1}(x)}\end{aligned}$$

(2) 部分積分を行うことにより，

$$\begin{aligned}f_n(x)&=\Big[t^n\{-\sin(x-t)\}\Big]_0^x-\int_0^x nt^{n-1}\{-\sin(x-t)\}\,dt\\&=n\int_0^x t^{n-1}\sin(x-t)dt\\&=n\left\{\Big[t^{n-1}\cos(x-t)\Big]_0^x-\int_0^x(n-1)t^{n-2}\cos(x-t)dt\right\}\\&=n\left\{x^{n-1}-(n-1)f_{n-2}(x)\right\}\\&=\boldsymbol{nx^{n-1}-n(n-1)f_{n-2}(x)}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{別解}}$

部分積分を用いない場合，(1) の結果を繰り返し利用すると，

$$\begin{aligned}f_n(x)&=\int_0^x t^n\cos(x-t)\,dt\\&=\int_0^x t^n(\cos x\cos t+\sin x\sin t)\,dt\\&=\cos x\cdot c_n(x)+\sin x\cdot s_n(x)\cdots①\\&=\cos x\cdot(x^n\sin x-ns_{n-1}(x))+\sin x\cdot(-x^n\cos x+nc_{n-1}(x))\\&=-n\cos x\cdot s_{n-1}(x)+n\sin x\cdot c_{n-1}(x)\\&=-n\cos x\cdot\left\{-x^{n-1}\cos x+(n-1)c_{n-2}(x)\right\}+n\sin x\cdot\left\{x^{n-1}\sin x-(n-1)s_{n-2}(x)\right\}\\&=nx^{n-1}-n(n-1)\left\{\cos x\cdot c_{n-2}(x)+\sin x\cdot s_{n-2}(x)\right\}\\&=\boldsymbol{nx^{n-1}-n(n-1)f_{n-2}(x)}\end{aligned}$$

$$(\because ①より \cos x \cdot c_{n-2}(x) + \sin x \cdot s_{n-2}(x) = f_{n-2}(x))$$

(3)　(2) より，

$$\begin{aligned} & f_n(x) + n(n-1)f_{n-2}(x) = nx^{n-1} \\ \iff & \int_0^x t^n \cos(x-t)dt \ + \ n(n-1)\int_0^x t^{n-2}\cos(x-t)dt = nx^{n-1} \end{aligned}$$

これに $n=4$ を代入すると，

$$\begin{aligned} & \int_0^x t^4 \cos(x-t)dt + 12\int_0^x t^2\cos(x-t)dt = 4x^3 \\ \iff & \int_0^x (t^4+12t^2)\cos(x-t)dt = 4x^3 \\ \iff & \int_0^x \left(\frac{t^4}{4}+3t^2\right)\cos(x-t)dt = x^3 \end{aligned}$$

したがって，$\displaystyle\int_0^x h(t)\cos(x-t)dt = x^3$ を満たす多項式 $h(t)$ の一例は，$\boldsymbol{\dfrac{t^4}{4}+3t^2}$.

$\boxed{\text{別解}}$

$\cos(x-t) = \cos x\cos t + \sin x \sin t$ なので，(3) の与式から

$$\cos x\int_0^x h(t)\cos t dt + \sin x\int_0^x h(t)\sin t dt = x^3 \cdots ②$$

となる．この両辺を x で微分すると，

$$\begin{aligned} & -\sin x\int_0^x h(t)\cos t dt + h(x)\cos^2 x \\ & \quad + \cos x\int_0^x h(t)\sin t dt + h(x)\sin^2 x = 3x^2 \\ \iff & -\sin x\int_0^x h(t)\cos t dt + \cos x\int_0^x h(t)\sin t dt + h(x) = 3x^2 \cdots ③ \end{aligned}$$

となり，さらにこの両辺を x で微分すると，

$$\begin{aligned} & -\cos x\int_0^x h(t)\cos t dt - h(x)\sin x\cos x \\ & \quad - \sin x\int_0^x h(t)\sin t dt + h(x)\cos x\sin x + h'(x) = 6x \\ \iff & h'(x) = x^3 + 6x \quad (\because ②) \end{aligned}$$

となる．③に $x=0$ を代入することにより $h(0)=0$ であるから，$h(x) = \dfrac{x^4}{4}+3x^2$，すなわち $\boldsymbol{h(t) = \dfrac{t^4}{4}+3t^2}$ である．(つまり，実は多項式 $h(t)$ は一意に決まる)

的中!!

積分漸化式を前日に確認！

n を 0 以上の整数とする．

(1) $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$ とする．$I_{n+1}+I_n$ を求めよ．

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{2x}dx$ とする．$n \geqq 1$ のとき I_n を I_{n-1} で表せ．

(3) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とする．$n \geqq 2$ のとき I_n を I_{n-2} で表せ．

(4) $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_1^e (\log x)^n\, dx$ とする．$n \geqq 1$ のとき I_n を I_{n-1} で表せ．

講評

〔1〕［数列］（やや易）(1) は一見すると問題の設定がやや難解だが，どのような図になるかさえ掴めれば容易に解くことができる．(2) では，(1) で得られた漸化式から一般項を求めれば極限は容易に求まる．この問題は落とせない．

〔2〕［三角関数の最大値］（標準）(1) は辺長などを三角関数で表していけばよい．(2) は，$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおくという典型処理が出来たかどうかがポイント．この問題も完答したい．

〔3〕［確率］（標準）(1)(2) は事象をうまく言い換えて考えれば難しくはないが，言い換えられなかった場合，やや煩雑な処理になったかもしれない．(3) は余事象を用いてそれまでの結果をうまく利用して求めたい．

〔4〕［数の分類］（やや難）この種の証明に慣れていないと難しい．2006 年の和歌山県立医科大の入試問題と全く同じである．

〔5〕［積分漸化式］（標準～やや難）(1)(2) は部分積分を行うことにより漸化式を作ることができる．ここは是非取りたい．(3) は与えられた式を見て，(2) で得られた式を利用することに気づくかがポイントになるが，気づきにくいかもしれない．

昨年度前期と比較すると，難易度は下がり分量も減って解きやすいセットとなっている．〔1〕～〔3〕は完答し，〔5〕は (2) までを仕上げたい．目標は 75%．