医学部進学予備校 メビオ 解答速報

久留米大学医学部（後期） 数学

2019年3月8日実施

次の $\boxed{}$ に適切な解を入れよ。複数の解がある場合は，コンマで区切ってすべての解を記入すること。

1. 変量 x についてのデータの値が，5 個の値 $x_1=5$，$x_2=4$，$x_3=8$，$x_4=6$，$x_5=12$ であるとき，新たな変量 y を $y_i=-2x_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ で定める。このとき，x の平均値は $\boxed{\ ①\ }$，x の分散は $\boxed{\ ②\ }$，x の標準偏差は $\boxed{\ ③\ }$，x と y の相関係数は $\boxed{\ ④\ }$ である。ただし，$\boxed{\ ③\ }$ は小数で表す必要はない。

解答

① 7 ② 8 ③ $2\sqrt{2}$ ④ -1

解説

変量 x，y の平均値を $\overline{x}$，$\overline{y}$，標準偏差を s_x，s_y，共分散を s_{xy}，相関係数を r とする．

i	x_i	y_i	$x_i-\overline{x}$	$y_i-\overline{y}$	$(x_i-\overline{x})^2$	$(y_i-\overline{y})^2$	$(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$
1	5	-10	-2	4	4	16	-8
2	4	-8	-3	6	9	36	-18
3	8	-16	1	-2	1	4	-2
4	6	-12	-1	2	1	4	-2
5	12	-24	5	-10	25	100	-50
	$\overline{x}=7$	$\overline{y}=-14$			${s_x}^2=8$	${s_y}^2=32$	$s_{xy}=-16$

表より，x の平均値は $\overline{x}=\mathbf{7}$，x の分散は ${s_x}^2=\mathbf{8}$，x の標準偏差は $s_x=\mathbf{2\sqrt{2}}$.
また x と y の相関係数は

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y}=\frac{-16}{2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}}=\mathbf{-1}$$

別解

(以下は相関係数を求める際の別解である.)
$y_i=-2x_i$，$\overline{y}=-2\overline{x}$ より，
y の分散は

$${s_y}^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(-2x_i+2\overline{x})^2=\frac{4}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=4{s_x}^2$$

x と y の共分散は

$$s_{xy}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(-2x_i+2\overline{x})=-\frac{2}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=-2{s_x}^2$$

よって相関係数は

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{-2{s_x}^2}{s_x \cdot 2s_x} = \mathbf{-1}$$

【参考】 一般に変量 x と変量 y の間に $y_i = ax_i + b$ （a, b は実数）の関係があるとき，

$a > 0$ ならば相関係数は 1，
$a < 0$ ならば相関係数は -1

である．

的中‼

後期試験対策授業（2/26,27 実施）

10 名に対してそれぞれ 10 問からなる 2 種類の試験 A, B を行ったところ，A の正答数の平均は 5.5, B の正答数の平均は 5, A の正答数と B の正答数の共分散は 2.7 であった．この結果に対して，

$$(\text{A の得点}) = 10 \times (\text{A の正答数}) - 5$$
$$(\text{B の得点}) = 11 \times (\text{B の正答数}) - 7$$

として得点を定めるとき，A の得点と B の得点の共分散は $\boxed{\text{ヒフヘ}}$ である．

2.　4 桁の $(n+1)$ 進数 $123n_{(n+1)}$ を考える。$n_{(n+1)} \times 123n_{(n+1)} = 11111_{(n+1)}$ を満たすような n の値のとき，$11111_{(n+1)}$ を 10 進法で表すと $\boxed{⑤}$ である。ただし，n は 4 以上 9 以下の自然数とする。

解答

⑤ 1555

解説

10 進法に変換すると，

$$
\begin{aligned}
& n_{(n+1)} \times 123n_{(n+1)} = 11111_{(n+1)} \\
& \iff n\{(n+1)^3 + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + n\} = (n+1)^4 + (n+1)^3 + (n+1)^2 + (n+1) + 1 \cdots ① \\
& \iff n^2 - 4n - 5 = 0 \\
& \iff (n+1)(n-5) = 0
\end{aligned}
$$

であり，$4 \leqq n \leqq 9$ より $n=5$ となるので，求める数は

$$11111_{(6)} = 6^4 + 6^3 + 6^2 + 6^1 + 1 = \mathbf{1555}$$

である．

別解

（以下は $n=5$ を求める際の別解である．）

①において，n を法とする合同式で考えると，

$$① \Longrightarrow 0 \equiv 5 \pmod{n}$$

であり，これが成立するのは $n=5$ のときのみである．

3. 座標平面上で，不等式 $x^2+y^2-2\sqrt{3}|y| \leqq 1$ の表す領域を D とする。

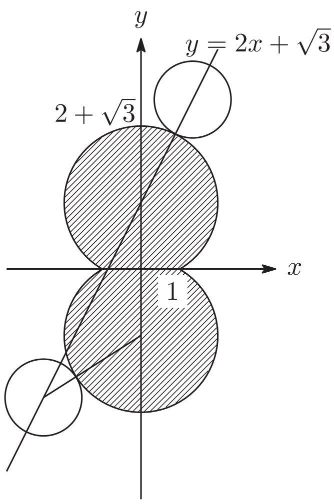
(1) 領域 D の面積は $\boxed{⑥}$ である。

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，等式 $(x-a)^2+(y-2a-\sqrt{3})^2=1$ を満たす実数 a の最大値は $\boxed{⑦}$ であり，最小値は $\boxed{⑧}$ である。

解答

⑥ $\dfrac{20}{3}\pi+2\sqrt{3}$ ⑦ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ ⑧ $\dfrac{-4\sqrt{3}-\sqrt{33}}{5}$

解説



(1) 領域 D は $y \geqq 0$ のとき $x^2+y^2-2\sqrt{3}y \leqq 1$ つまり $x^2+(y-\sqrt{3})^2 \leqq 4$ であるから，$(0,\ \sqrt{3})$ を中心とする半径 2 の円の内部および周の $y \geqq 0$ の部分である．また，$y \leqq 0$ のとき $x^2+y^2+2\sqrt{3}y \leqq 1$ つまり $x^2+(y+\sqrt{3})^2 \leqq 4$ であるから，$(0,\ -\sqrt{3})$ を中心とする半径 2 の円の内部および周の $y \leqq 0$ の部分である．図示すると上図斜線部になる．

D は x 軸対称で，$y \geqq 0$ の部分は半径 2，中心角 $\dfrac{5}{3}\pi$ の扇形と一辺 2 の正三角形を合わせたものであるから，全体の面積を S とすると，

$$S=2\left(4\pi\times\frac{5}{6}+\sqrt{3}\right)=\boldsymbol{\frac{20}{3}\pi+2\sqrt{3}}$$

(2) $(x-a)^2+(y-2a-\sqrt{3})^2=1$ は $(a,\ 2a+\sqrt{3})$ を中心とする半径 1 の円である．この中心は直線 $y=2x+\sqrt{3}$ 上にある．この円が領域 D と共有点を持つような a の最大値と最小値を求めればよい．

領域 D と共有点を持つためには $x^2+(y-\sqrt{3})^2 \leqq 4$ と $(x-a)^2+(y-2a-\sqrt{3})^2=1$ の中心間距離が半径の和以下，つまり

$$\sqrt{(a-0)^2+(2a+\sqrt{3}-\sqrt{3})^2} \leqq 2+1 \ \cdots ①$$

が成り立つか，$x^2+(y+\sqrt{3})^2 \leqq 4$ と $(x-a)^2+(y-2a-\sqrt{3})^2=1$ の中心間距離が半径の和以下，つまり

$$\sqrt{(a-0)^2+(2a+\sqrt{3}+\sqrt{3})^2} \leqq 2+1 \ \cdots ②$$

が成り立つことが必要十分である．

$$① \iff -\frac{3\sqrt{5}}{5} \leqq a \leqq \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$② \iff 5a^2+8\sqrt{3}a+3 \leqq 0 \iff \frac{-4\sqrt{3}-\sqrt{33}}{5} \leqq a \leqq \frac{-4\sqrt{3}+\sqrt{33}}{5}$$

これらより a の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{5}}{5}}$, a の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{-4\sqrt{3}-\sqrt{33}}{5}}$ とわかった.

4. $a_1=2$，$a_2=0$ である数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_{n+2}-S_{n+1}-2S_n=n$ を満たすものとする。ただし，n は自然数とする。

(1) S_n と a_n の関係式より，数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2}-a_{n+1}-\boxed{⑨}\,a_n=\boxed{⑩}$ を満たす。ただし，$\boxed{⑨}$，$\boxed{⑩}$ は定数とする。

(2) すべての自然数 n に対して，$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}+\gamma=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n+\gamma)$ が成立するような定数 α，β，γ の組を α の値が小さいものから順に並べると $\boxed{⑪}$，$\boxed{⑫}$ である。

(3) 一般項 a_n を n を用いて表すと，$a_n=\boxed{⑬}$ である。

解答

⑨ 2　⑩ 1　⑪ $(-1,\ 2,\ 1)$　⑫ $\left(2,\ -1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$　⑬ $2^{n-1}+\dfrac{3}{2}\cdot(-1)^{n-1}-\dfrac{1}{2}$

解説

(1) $n\geqq 2$ のとき，以下の 2 式

$$S_{n+2}-S_{n+1}-2S_n=n$$
$$S_{n+1}-S_n-2S_{n-1}=n-1$$

の辺々を引くと，$a_{n+2}-a_{n+1}-2a_n=1\ \cdots$ ① が得られる．

$n=1$ のとき，$S_3-S_2-2S_1=1$ と $S_1=a_1=2$，$S_2=a_1+a_2=2$ より，$S_3=7$ である．よって，$a_3=S_3-(a_1+a_2)=5$ であり，①は $n=1$ でも成り立つ．

したがって，$a_{n+2}-a_{n+1}-\mathbf{2}a_n=\mathbf{1}$ である．

(2) $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}+\gamma=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n+\gamma)$ を展開して移項して整理すると
$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=\gamma(\beta-1)$ となるので，これと①を係数比較すると，

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=-2\\ \gamma(\beta-1)=1\end{cases}$$

となる．これを解いて，$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\mathbf{(-1,\ 2,\ 1)}$，$\left(\mathbf{2,\ -1,\ -\dfrac{1}{2}}\right)$ である．

(3) (2) の $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=(-1,\ 2,\ 1)$ を用いると，

$$a_{n+2}+a_{n+1}+1=2(a_{n+1}+a_n+1)$$

である．$a_{n+1}+a_n+1=b_n$ とおくと，

$$b_1=3,\ b_{n+1}=2b_n$$

である．よって，$b_n=3\cdot 2^{n-1}$ より

$$a_{n+1}+a_n=3\cdot 2^{n-1}-1\ \cdots\ ②$$

である．

同様に，$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\left(2,\ -1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ を用いると，

$$a_{n+2}-2a_{n+1}-\frac{1}{2}=-\left(a_{n+1}-2a_n-\frac{1}{2}\right)$$

である．$a_{n+1}-2a_n-\dfrac{1}{2}=c_n$ とおくと，

$$c_1=-\frac{9}{2},\ c_{n+1}=-c_n$$

である．よって，$c_n=-\dfrac{9}{2}\cdot(-1)^{n-1}$ より

$$a_{n+1}-2a_n=-\frac{9}{2}\cdot(-1)^{n-1}+\frac{1}{2}\ \cdots ③$$

である．

(② − ③) ÷ 3 より，

$$a_n=\boldsymbol{2^{n-1}+\frac{3}{2}\cdot(-1)^{n-1}-\frac{1}{2}}$$

である．

的中!!

久留米大学医学部後期直前授業（3/6 実施）

$a_1=1,\ a_2=4,\ a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n-2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ において，初めて 1000 より大きくなるのは第 (　) 項である．

5. 円に内接する正十角形の 10 個の頂点から，異なる 3 個の頂点を結んでできる三角形を考える。

(1) 三角形の総数は $\boxed{⑭}$ 個である。

(2) 直角三角形の総数は $\boxed{⑮}$ 個である。

(3) 正十角形と 1 辺だけを共有する三角形の総数は $\boxed{⑯}$ 個である。

(4) 正十角形と辺を共有しない三角形の総数は $\boxed{⑰}$ 個である。

解答

⑭ 120　⑮ 40　⑯ 60　⑰ 50

解説

三角形は，合同であっても選んだ頂点が異なれば異なるものとみなすことにする．

(1) 求める個数は，異なる 10 個の頂点から 3 個を選ぶ組合せの総数となるので，${}_{10}\mathrm{C}_3 = \mathbf{120}$ 個.

(2) 正十角形の対角線のうち，その外接円の直径となるものを 1 辺とする三角形を考えればよい．斜辺となる直径の選び方が 5 通り，その他の頂点の選び方が 8 通りずつあるので，求める個数は $5 \times 8 = \mathbf{40}$ 個.

(3) 正十角形のある 1 辺に対して，題意を満たすようなもう一つの頂点の選び方は $10 - 4 = 6$ 通りある（10 個の頂点から，その辺自身の両端とその両隣の計 4 個を除く 6 個）．従って求める個数は $10 \times 6 = \mathbf{60}$ 個.

(4) 題意の三角形の補集合は，$A = \{$ 正十角形と 1 辺だけを共有する三角形 $\}$ と $B = \{$ 正十角形と 2 辺を共有する三角形 $\}$ の和集合である．A の個数は前設問の通り．B の個数は正十角形の頂点数と同じなので 10 個である．従って求める個数は，$120 - (60 + 10) = \mathbf{50}$ 個.

【参考】凸 n 角形 $(n \geqq 6)$ の n 個の頂点のうち 3 個を結んでできる三角形のうち，凸 n 角形と辺を共有しないものの個数は ${}_n\mathrm{C}_3 - \{n(n-4) + n\} = \dfrac{n(n-4)(n-5)}{6}$ 個である.

6. 関数 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ のグラフについて，$y \leqq 3$ の部分を C とする。曲線 C 上の点 P の x 座標の最小値を a，最大値を b とすると，$a=$ ⑱ ，$b=$ ⑲ であり，曲線 C の長さは ⑳ である。

解答

⑱ $\log(3-2\sqrt{2})$　⑲ $\log(3+2\sqrt{2})$　⑳ $4\sqrt{2}$

解説

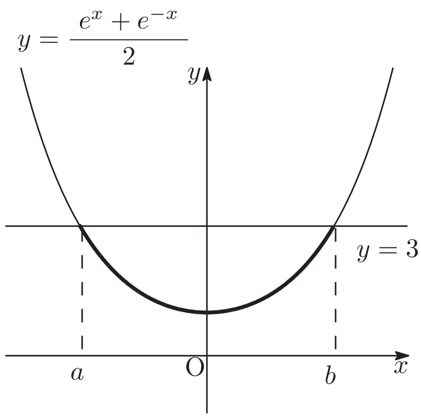
与グラフと $y=3$ の交点の x 座標を求める.

$$3=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \iff e^x+e^{-x}=6 \iff (e^x)^2+1=6e^x$$

$e^x=t$ とおくと $t^2-6t+1=0\cdots$① $\iff$ $t=e^x=3\pm2\sqrt{2}$ $\iff$ $x=\log(3\pm2\sqrt{2})$. よってグラフより，$a=\mathbf{\log(3-2\sqrt{2})}$，$b=\mathbf{\log(3+2\sqrt{2})}$. ここで，$e^a$，$e^b$ は①の 2 解であり，解と係数の関係より $e^ae^b=1$ であることに注意しておく.

曲線長を l とするとグラフの概形より，

$$\begin{aligned}
l &= \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx \\
&= \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx \\
&= \int_a^b \sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\,dx \\
&= \int_a^b \sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}\,dx \\
&= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx \\
&= \int_a^b \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx \\
&= \left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_a^b \\
&= \frac{1}{2}\{(e^b-e^{-b})-(e^a-e^{-a})\}\cdots② \\
&= \frac{1}{2}\{(e^b-e^a)-(e^a-e^b)\} \quad (\because\ e^ae^b=1) \\
&= e^b-e^a \\
&= (3+2\sqrt{2})-(3-2\sqrt{2}) \\
&= \mathbf{4\sqrt{2}}
\end{aligned}$$



【参考】$e^x+e^{-x}=6 \iff (e^x-e^{-x})^2=6^2-4=32=(4\sqrt{2})^2$ より，a，b がそれぞれ $e^a-e^{-a}=-4\sqrt{2}$，$e^b-e^{-b}=4\sqrt{2}$ を満たすことを用いると，②からより簡単に計算できる.

講評

1.［データの分析］（やや易）分散・共分散から相関係数まで求める典型的な問題．相関係数が -1 となるのは明らかだが，数値もきれいなので公式通り計算しても何ら問題なく解ける．

2.［n 進法］（やや易）定義に従って計算するだけである．

3.［図形と式］（標準）媒介変数を持つ円が，指定された領域と共有点を持つための条件を求める問題．円と円が接する条件を中心間距離でとらえるのがポイント．答はやや複雑．

4.［数列］（標準）S_n に関する漸化式は，「ずらして引く」という解法が出てくれば良い．あとは定数項つきの三項間漸化式であるが，誘導が親切なので迷うことはないだろう．

5.［場合の数］（やや易）正十角形の頂点から 3 つを選んで出来る三角形の個数を調べる問題．典型題であり落とせない．

6.［曲線の長さ］（易）懸垂線（カテナリー）の長さを求める問題．グラフの概形把握，曲線長を求める積分計算ともに手際よくすませたい．

本年度の前期試験と同様に，昨年度までより易化した．素直で解きやすい問題が多い．差が付くとすれば，計算ミスの有無と，大問 3，4 でどれだけ立ち回れたかだろう．目標は 80%.