

久留米大学医学部(前期) 数学

2019年2月1日実施

次の に適切な解を入れよ。複数の解がある場合は、コンマで区切ってすべての解を記入すること。

1. 男子 10 人と女子 5 人で回転寿司のお店に行った。お会計の時に、お寿司を食べ終えたお皿の枚数を数えて計算すると、男子 10 人については平均枚数が 9 枚、標準偏差が $\sqrt{3}$ 枚であった。また、女子 5 人については平均枚数が 6 枚、標準偏差が 3 枚であった。このとき、男女 15 人について、お寿司を食べ終えたお皿の平均枚数は ① 枚、標準偏差は ② 枚である。ただし、 ② は小数で表わす必要はない。

解答

① 8 ② $\sqrt{7}$

解説

男子のお皿の平均枚数を $\overline{x_m}$ 、女子のお皿の平均枚数を $\overline{x_f}$ とし、男女それぞれの、お皿の枚数の 2 乗の平均値を $\overline{x_m^2}$ 、 $\overline{x_f^2}$ 、それぞれの分散を s_m^2 、 s_f^2 、標準偏差を s_m 、 s_f で表す。

題意より、 $\overline{x_m} = 9$ 、 $\overline{x_f} = 6$ 、 $s_m = \sqrt{3}$ 、 $s_f = 3$ である。

さらに男女 15 人についてのお皿の枚数の平均値を \overline{x} 、2 乗の平均値を $\overline{x^2}$ 、分散を s^2 、標準偏差を s とする。

$$\begin{aligned} 15\overline{x} &= 10\overline{x_m} + 5\overline{x_f} \\ &= 10 \cdot 9 + 5 \cdot 6 \\ &= 120 \\ \overline{x} &= \frac{120}{15} \\ &= 8 \end{aligned}$$

(分散) = (2 乗の平均値) - (平均値)² より

男子について

$$\begin{aligned} s_m^2 &= \overline{x_m^2} - (\overline{x_m})^2 \\ (\sqrt{3})^2 &= \overline{x_m^2} - 9^2 \\ \overline{x_m^2} &= 84 \dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

女子について

$$s_f^2 = \overline{x_f^2} - (\overline{x_f})^2$$

$$3^2 = \overline{x_f^2} - 6^2$$

$$\overline{x_f^2} = 45 \cdots \textcircled{4}$$

③, ④ より, 15 人の 2 乗の平均値 $\overline{x^2}$ について

$$15\overline{x^2} = 10\overline{x_m^2} + 5\overline{x_f^2}$$

$$= 10 \cdot 84 + 5 \cdot 45$$

$$= 840 + 225$$

$$= 1065$$

$$\overline{x^2} = \frac{1065}{15}$$

$$= 71$$

よって分散は

$$s^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$$

$$= 71 - 8^2$$

$$= 7$$

標準偏差は $s = \sqrt{7}$

注釈

実は女子 5 人のお皿の枚数に関して, 平均枚数が 6 枚, 標準偏差が 3 枚になることはあり得ない.
女子 5 人の皿の枚数を, $y_1 + 6, y_2 + 6, y_3 + 6, y_4 + 6, y_5 + 6$ とすると,

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 = 45 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

でなければならない. ①より

$$(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)^2 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\iff y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + 2(y_1y_2 + y_1y_3 + \cdots + y_4y_5) \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\iff y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 \equiv 0 \pmod{2}$$

となるのだが, これは②と矛盾する.

2. 大小2個の立方体のさいころを同時に投げ、大きいさいころの出る目の数を a 、小さいさいころの出る目の数を b とする。このとき、 x の2次方程式 $x^2 - ax + b = 0 \cdots \textcircled{1}$ が実数解をもつ確率は $\textcircled{3}$ である。また、方程式 $\textcircled{1}$ が実数解をもつとき、その解が重解である条件付き確率は $\textcircled{4}$ である。

解答

$\textcircled{3} \frac{19}{36} \quad \textcircled{4} \frac{2}{19}$

解説

$\textcircled{1}$ 式の判別式を D とすると、 $\textcircled{1}$ 式が実数解をもつ条件は $D = a^2 - 4b \geq 0$ より、 $a^2 \geq 4b$.

大小2個のさいころの目の出方は36通りあり、これらは同様に確からしい。この36通りのうち $a^2 \geq 4b$ を満たすのは、

a	b	場合の数
1	なし	0
2	1	1
3	1, 2	2
4	1, 2, 3, 4	4
5	1, 2, 3, 4, 5, 6	6
6	1, 2, 3, 4, 5, 6	6
計		19

により19通りである。したがって実数解をもつ確率は $\frac{19}{36}$.

また、この19通りのうち重解すなわち $D = 0$ を満たすのは $(a, b) = (2, 1), (4, 4)$ の2通りだけなので、求める条件付き確率は $\frac{2}{19}$.

3. 座標平面上において、円 $C: x^2 + y^2 + 2kx + (k+2)y - \frac{1}{4}k - \frac{1}{4} = 0$ (k は実数) を考える。

- (1) 円 C の半径の最小値は、 $k = \boxed{\text{⑤}}$ のとき $\boxed{\text{⑥}}$ である。
- (2) k の値にかかわらず、円 C の中心は、常に直線 $y = \boxed{\text{⑦}}$ 上にある。
- (3) k の値にかかわらず、円 C は常に2つの定点を通る。この定点の x 座標は $\boxed{\text{⑧}}$ と $\boxed{\text{⑨}}$ である。
ただし、 $\boxed{\text{⑧}} < \boxed{\text{⑨}}$ とする。

解答

⑤ $-\frac{1}{2}$ ⑥ $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ⑦ $\frac{1}{2}x - 1$ ⑧ $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ ⑨ $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

解説

(1) $C: (x+k)^2 + \left(y + \frac{k+2}{2}\right)^2 = k^2 + \frac{1}{4}(k+2)^2 + \frac{1}{4}k + \frac{1}{4}$.

円 C の半径を r とすると、

$$r^2 = k^2 + \frac{1}{4}(k+2)^2 + \frac{1}{4}k + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}k^2 + \frac{5}{4}k + \frac{5}{4} = \frac{5}{4}\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{16}$$

よって $k = -\frac{1}{2}$ のとき円 C の半径 r は最小値 $\frac{\sqrt{15}}{4}$ をとる。

(2) 円 C の中心の座標を (X, Y) とすると、(1) より $X = -k$, $Y = -\frac{k+2}{2}$ と表される。

k を消去すると、 $Y = \frac{1}{2}X - 1$.

よって、円 C の中心は、常に直線 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 上にある。

(3) 円 C の方程式を k について整理すると、 $\left(x^2 + y^2 + 2y - \frac{1}{4}\right) + k\left(2x + y - \frac{1}{4}\right) = 0$.

この方程式が k の値にかかわらず成り立つので、 $x^2 + y^2 + 2y - \frac{1}{4} = 0$ かつ $2x + y - \frac{1}{4} = 0$ である。

この連立方程式を解くと $x = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$.

よって、定点の x 座標は $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ と $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ である。

4. n を正の整数とする。

(1) $\sum_{k=1}^n k\{n - (k - 1)\} = \boxed{\text{⑩}}$ である。

(2) 一般項が $a_n = \sum_{k=1}^n k\{n - (k - 1)\}$ である数列 $\{a_n\}$ がある。このとき、条件 $b_1 = 0, b_{n+1} - b_n = a_n$ で定められる数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = \boxed{\text{⑪}}$ である。また、条件 $c_1 = 0, c_{n+1} - c_n = \frac{1}{a_n}$ で定められる数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n = \boxed{\text{⑫}}$ である。

解答

⑩ $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ ⑪ $\frac{1}{24}n(n-1)(n+1)(n+2)$ ⑫ $\frac{3(n-1)(n+2)}{2n(n+1)}$

解説

(1)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k\{n - (k - 1)\} &= \sum_{k=1}^n \{-k^2 + (n + 1)k\} \\ &= -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ が数列 $\{b_n\}$ の階差数列であるから、 $n \geq 2$ において、

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{6}k(k+1)(k+2) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{6}k(k+1)(k+2) \cdot \frac{1}{4}\{-(k-1) + (k+3)\} \\ &= \frac{1}{24} \sum_{k=1}^{n-1} \{-(k-1)k(k+1)(k+2) + k(k+1)(k+2)(k+3)\} \\ &= \frac{1}{24} \{-0 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ &\quad - \dots - (n-2)(n-1)n(n+1) + (n-1)n(n+1)(n+2)\} \\ &= \frac{1}{24}n(n-1)(n+1)(n+2) \quad (n=1 \text{ でも成立}) \end{aligned}$$

(注 ; $\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)$ を展開してシグマ計算をしてもよい)

また、数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ が数列 $\{c_n\}$ の階差数列であるから、 $n \geq 2$ において、

$$\begin{aligned}
c_n &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{6}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} 3 \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} \\
&= 3 \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} \right\} \\
&= 3 \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{n(n+1)} \right\} \\
&= \frac{3(n-1)(n+2)}{2n(n+1)} \quad (n=1 \text{ でも成立})
\end{aligned}$$

5. 平面上に $\triangle OAB$ があり, $\vec{OC} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$, $\vec{OD} = (s+1)\vec{OA} + (t-1)\vec{OB}$ を満たす点 C, D がある。ただし, s, t を実数とする。

- (1) $\triangle OAB$ の形状や s, t の値にかかわらず, 四角形 $ABCD$ の形状は ⑬ である。
- (2) $\triangle OAB$ が $\angle AOB = 90^\circ$ の直角二等辺三角形であるとする。このとき, 四角形 $ABCD$ がひし形になるための条件を s, t の式で表すと ⑭ である。また, 四角形 $ABCD$ が正方形になるときの s, t の値の組を求めると, $(s, t) = (\text{⑮}, \text{⑯}), (\text{⑰}, \text{⑱})$ である。ただし, $\text{⑮} < \text{⑰}$ とする。

解答

⑬ 平行四辺形 ⑭ $s^2 + t^2 - 2t - 1 = 0$ ⑮ -1 ⑯ 0 ⑰ 1 ⑱ 2

解説

(1) $\vec{OD} = s\vec{OA} + t\vec{OB} + (\vec{OA} - \vec{OB}) = \vec{OC} + \vec{BA}$ より $\vec{OD} - \vec{OC} = \vec{BA}$. よって $\vec{CD} = \vec{BA}$

すなわち四角形 $ABCD$ の形状は **平行四辺形**.

(2) $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とおくと, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

四角形 $ABCD$ の形状が平行四辺形であることから, ひし形であるための条件は $\vec{AC} \perp \vec{BD}$ であり,

$$\begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{BD} &= \{(s-1)\vec{a} + t\vec{b}\} \cdot \{(s+1)\vec{a} + (t-2)\vec{b}\} \\ &= (s-1)(s+1)|\vec{a}|^2 + t(t-2)|\vec{b}|^2 + \{(s-1)(t-2) + (s+1)t\}\vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \end{aligned}$$

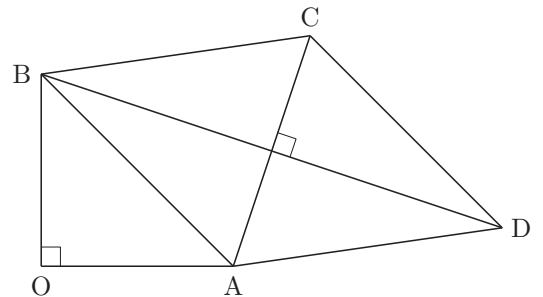
ここで $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ を用いると

$$s^2 + t^2 - 2t - 1 = 0 \dots \textcircled{7}$$

さらに正方形となるための条件は $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$ なので,

$$\begin{aligned} |(s-1)\vec{a} + t\vec{b}|^2 &= |(s+1)\vec{a} + (t-2)\vec{b}|^2 \\ \therefore (s-1)^2 + t^2 &= (s+1)^2 + (t-2)^2 \\ \therefore s - t &= -1 \dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ より $(s, t) = (-1, 0), (1, 2)$



別解

(2) 一般性を失うことなく $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ と置いてよい。このとき $C(s, t)$, $D(s+1, t-1)$ となるから, $\vec{AB} = (-1, 1)$, $\vec{AD} = (s, t-1)$ と計算できる。

四角形 $ABCD$ がひし形になるためには $AB = AD$ が成り立てばよいから, $s^2 + (t-1)^2 = 2$ が満たすべき条件となる。

さらに正方形となるために $\vec{AD} \perp \vec{AB}$ が成り立てばよいから, $\vec{AD} = (s, t-1) = \pm(1, 1)$ とおける。ここから s, t を求めてもよい。

6. 座標平面上において、曲線 $C: y = e^x (x \geq 0)$ と直線 $\ell: y = (e-2)x + 2 (x \geq 0)$ および y 軸とで囲まれた図形を D とする。ただし、 e を自然対数の底とし、曲線 C と直線 ℓ は点 $(1, e)$ で交わる。

(1) 図形 D の面積は ⑱ である。

(2) 図形 D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は ㉔ である。

解答

⑱ $2 - \frac{1}{2}e$ ㉔ $\frac{2(e-2)}{3}\pi$

解説

(1) $\frac{1}{2}(e+2) \cdot 1 - \int_0^1 e^x dx = \frac{1}{2}(e+2) - (e-1) = 2 - \frac{1}{2}e$

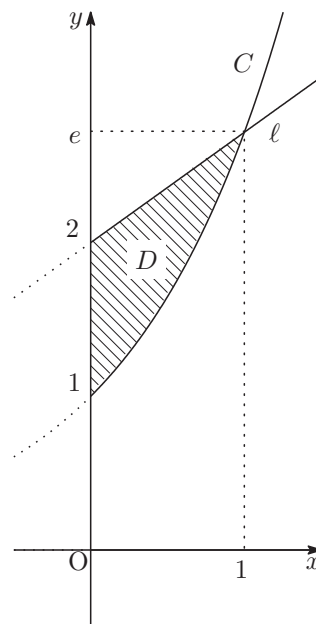
(2) 求める立体の体積を V とすると、

$$V = \pi \int_1^e x^2 dy - 1^2 \cdot \pi \cdot (e-2) \cdot \frac{1}{3}.$$

ここで $y = e^x$ より、 $dy = e^x dx$, $y: 1 \rightarrow e$ のとき $x: 0 \rightarrow 1$ なので、

$$\int_1^e x^2 dy = \int_0^1 x^2 e^x dx = \left[(x^2 - 2x + 2)e^x \right]_0^1 = e - 2$$

$$\text{これより } V = (e-2)\pi - \left(\frac{1}{3}e - \frac{2}{3} \right) \pi = \frac{2(e-2)}{3}\pi$$



講評

1. [データの分析] (やや易) 平均と標準偏差の計算. 計算法だけ覚えていれば悩むところはない.
2. [確率] (やや易) 確率と 2 次方程式の融合だが、やることは数え上げるだけの問題.
3. [図形と式] (やや易) 円と直線に関する基本問題. 設定も素直.
4. [数列] (標準) 和の計算. うまく変形して計算したいところだが、まともに計算してもそう難しくはない.
5. [ベクトル] (標準) 与えられた 4 点がひし形, 正方形になる条件を問う問題. ⑭ で何をしたら良いのか困った受験生もいただろう.
6. [数学Ⅲの積分] (やや易) 単純な面積と体積の計算問題.

昨年に比べて大幅に易化した. 凝った設定の問題が姿を消し, 全問素直な設定で取り組みやすい. 計算量も多くな
く, 「如何にミスをしないか?」の勝負になりそう. 目標は 80%.

医学部進学予備校 **メビオ**

〒540-0033 大阪市中央区石町2-3-12 ヘルヴォア天満橋

0120-146-156

<https://www.mebio.co.jp/>

M e B i o
Scholastics