医学部進学予備校 メビオ 解答速報

久留米大学医学部（前期） 数学

2019年2月1日実施

次の $\boxed{}$ に適切な解を入れよ。複数の解がある場合は，コンマで区切ってすべての解を記入すること。

1\. 男子 10 人と女子 5 人で回転寿司（ずし）のお店に行った。お会計の時に，お寿司を食べ終えたお皿の枚数を数えて計算すると，男子 10 人については平均枚数が 9 枚，標準偏差が $\sqrt{3}$ 枚であった。また，女子 5 人については平均枚数が 6 枚，標準偏差が 3 枚であった。このとき，男女 15 人について，お寿司を食べ終えたお皿の平均枚数は $\boxed{①}$ 枚，標準偏差は $\boxed{②}$ 枚である。ただし，$\boxed{②}$ は小数で表わす必要はない。

解答

① 8　② $\sqrt{7}$

解説

男子のお皿の平均枚数を $\overline{x_m}$，女子のお皿の平均枚数を $\overline{x_f}$ とし，男女それぞれの，お皿の枚数の 2 乗の平均値を $\overline{x_m{}^2}$，$\overline{x_f{}^2}$，それぞれの分散を $s_m{}^2$，$s_f{}^2$，標準偏差を s_m，s_f で表す．
題意より，$\overline{x_m}=9$，$\overline{x_f}=6$，$s_m=\sqrt{3}$，$s_f=3$ である．
さらに男女 15 人についてのお皿の枚数の平均値を $\overline{x}$，2 乗の平均値を $\overline{x^2}$，分散を s^2，標準偏差を s とする．

$$\begin{aligned}15\overline{x}&=10\overline{x_m}+5\overline{x_f}\\&=10\cdot 9+5\cdot 6\\&=120\\\overline{x}&=\frac{120}{15}\\&=\mathbf{8}\end{aligned}$$

(分散) $=$ (2 乗の平均値) $-$ (平均値)^2 より
男子について

$$\begin{aligned}s_m{}^2&=\overline{x_m{}^2}-\left(\overline{x_m}\right)^2\\(\sqrt{3})^2&=\overline{x_m{}^2}-9^2\\\overline{x_m{}^2}&=84\ \cdots ㋐\end{aligned}$$

女子について

$$
\begin{aligned}
{s_f}^2 &= \overline{{x_f}^2} - \left(\overline{x_f}\right)^2 \\
3^2 &= \overline{{x_f}^2} - 6^2 \\
\overline{{x_f}^2} &= 45 \ \cdots ㋑
\end{aligned}
$$

㋐, ㋑ より，15 人の 2 乗の平均値 $\overline{x^2}$ について

$$
\begin{aligned}
15\overline{x^2} &= 10\overline{{x_m}^2} + 5\overline{{x_f}^2} \\
&= 10 \cdot 84 + 5 \cdot 45 \\
&= 840 + 225 \\
&= 1065 \\
\overline{x^2} &= \frac{1065}{15} \\
&= 71
\end{aligned}
$$

よって分散は

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 \\
&= 71 - 8^2 \\
&= 7
\end{aligned}
$$

標準偏差は $s = \boldsymbol{\sqrt{7}}$

2. 大小 2 個の立方体のさいころを同時に投げ，大きいさいころの出る目の数を a，小さいさいころの出る目の数を b とする。このとき，x の 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0 \cdots$ ① が実数解をもつ確率は $\boxed{\quad ③ \quad}$ である。また，方程式 ① が実数解をもつとき，その解が重解である条件付き確率は $\boxed{\quad ④ \quad}$ である。

解答

③ $\dfrac{19}{36}$ ④ $\dfrac{2}{19}$

解説

① 式の判別式を D とすると，① 式が実数解をもつ条件は $D = a^2 - 4b \geqq 0$ より，$a^2 \geqq 4b$.
大小 2 個のさいころの目の出方は 36 通りあり，これらは同様に確からしい．この 36 通りのうち $a^2 \geqq 4b$ を満たすのは，

a	b	場合の数
1	なし	0
2	1	1
3	1，2	2
4	1，2，3，4	4
5	1，2，3，4，5，6	6
6	1，2，3，4，5，6	6
計		19

により 19 通りである．したがって実数解をもつ確率は $\boldsymbol{\dfrac{19}{36}}$.

また，この 19 通りのうち重解すなわち $D = 0$ を満たすのは $(a,\ b) = (2,\ 1),\ (4,\ 4)$ の 2 通りだけなので，求める条件付き確率は $\boldsymbol{\dfrac{2}{19}}$.

3. 座標平面上において，円 $C: x^2+y^2+2kx+(k+2)y-\dfrac{1}{4}k-\dfrac{1}{4}=0$ (k は実数) を考える。

(1) 円 C の半径の最小値は，$k=$ $\boxed{⑤}$ のとき $\boxed{⑥}$ である。

(2) k の値にかかわらず，円 C の中心は，常に直線 $y=$ $\boxed{⑦}$ 上にある。

(3) k の値にかかわらず，円 C は常に 2 つの定点を通る。この定点の x 座標は $\boxed{⑧}$ と $\boxed{⑨}$ である。ただし，$\boxed{⑧} < \boxed{⑨}$ とする。

解答

⑤ $-\dfrac{1}{2}$　⑥ $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　⑦ $\dfrac{1}{2}x-1$　⑧ $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$　⑨ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

解説

(1) $C: (x+k)^2+\left(y+\dfrac{k+2}{2}\right)^2=k^2+\dfrac{1}{4}(k+2)^2+\dfrac{1}{4}k+\dfrac{1}{4}.$

円 C の半径を r とすると，

$$r^2=k^2+\frac{1}{4}(k+2)^2+\frac{1}{4}k+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}k^2+\frac{5}{4}k+\frac{5}{4}=\frac{5}{4}\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{16}$$

よって $k=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$ のとき 円 C の半径 r は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{15}}{4}}$ をとる.

(2) 円 C の中心の座標を $(X,\ Y)$ とすると，(1) より $X=-k,\ Y=-\dfrac{k+2}{2}$ と表される.

k を消去すると，$Y=\dfrac{1}{2}X-1.$

よって，円 C の中心は，常に直線 $y=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}x-1}$ 上にある.

(3) 円 C の方程式を k について整理すると，$\left(x^2+y^2+2y-\dfrac{1}{4}\right)+k\left(2x+y-\dfrac{1}{4}\right)=0.$

この方程式が k の値にかかわらず成り立つので，$x^2+y^2+2y-\dfrac{1}{4}=0$ かつ $2x+y-\dfrac{1}{4}=0$ である.

この連立方程式を解くと $x=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{4}.$

よって，定点の x 座標は $\boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$ と $\boldsymbol{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}$ である.

4.　n を正の整数とする。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\{n-(k-1)\} = \boxed{\quad ⑩ \quad}$ である。

(2)　一般項が $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\{n-(k-1)\}$ である数列 $\{a_n\}$ がある。このとき，条件 $b_1 = 0,\ b_{n+1} - b_n = a_n$ で定められる数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = \boxed{\quad ⑪ \quad}$ である。また，条件 $c_1 = 0,\ c_{n+1} - c_n = \dfrac{1}{a_n}$ で定められる数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n = \boxed{\quad ⑫ \quad}$ である。

解答

⑩ $\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$　⑪ $\dfrac{1}{24}n(n-1)(n+1)(n+2)$　⑫ $\dfrac{3(n-1)(n+2)}{2n(n+1)}$

解説

(1)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\{n-(k-1)\} &= \sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\} \\ &= -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

(2)　数列 $\{a_n\}$ が数列 $\{b_n\}$ の階差数列であるから，$n \geqq 2$ において，

$$\begin{aligned}b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{6}k(k+1)(k+2) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{6}k(k+1)(k+2)\cdot\frac{1}{4}\{-(k-1)+(k+3)\} \\ &= \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n-1}\{-(k-1)k(k+1)(k+2)+k(k+1)(k+2)(k+3)\} \\ &= \frac{1}{24}\{-0+1\cdot2\cdot3\cdot4-1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5-2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6 \\ &\qquad -\cdots\cdots-(n-2)(n-1)n(n+1)+(n-1)n(n+1)(n+2)\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{24}n(n-1)(n+1)(n+2)} \quad (n=1 \text{ でも成立})\end{aligned}$$

(注；$\dfrac{1}{6}k(k+1)(k+2)$ を展開してシグマ計算をしてもよい)

また，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ が数列 $\{c_n\}$ の階差数列であるから，$n \geqq 2$ において，

$$
\begin{aligned}
c_n &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{6}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} 3\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\} \\
&= 3\left\{\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots\cdots + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right\} \\
&= 3\left\{\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{n(n+1)}\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{3(n-1)(n+2)}{2n(n+1)}} \quad (n=1\text{ でも成立})
\end{aligned}
$$

5. 平面上に △OAB があり，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (s+1)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (t-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点 C, D がある。ただし，s, t を実数とする。

(1) △OAB の形状や s, t の値にかかわらず，四角形 ABCD の形状は $\boxed{⑬}$ である。

(2) △OAB が $\angle\mathrm{AOB} = 90^\circ$ の直角二等辺三角形であるとする。このとき，四角形 ABCD がひし形になるための条件を s, t の式で表すと $\boxed{⑭}$ である。また，四角形 ABCD が正方形になるときの s, t の値の組を求めると，$(s,\ t) = (\boxed{⑮},\ \boxed{⑯}),\ (\boxed{⑰},\ \boxed{⑱})$ である。ただし，$\boxed{⑮} < \boxed{⑰}$ とする。

解答

⑬ 平行四辺形　⑭ $s^2 + t^2 - 2t - 1 = 0$　⑮ -1　⑯ 0　⑰ 1　⑱ 2

解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$. よって $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$
すなわち四角形 ABCD の形状は **平行四辺形**.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおくと，$|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.
四角形 ABCD の形状が平行四辺形であることから，ひし形であるための条件は $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ であり，

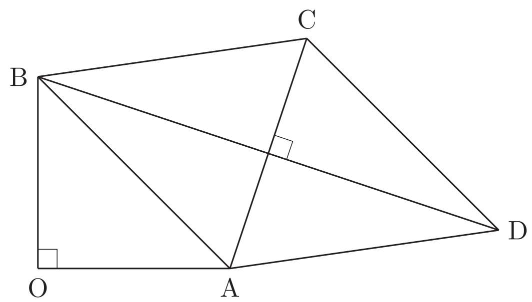
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \{(s-1)\vec{a} + t\vec{b}\}\cdot\{(s+1)\vec{a} + (t-2)\vec{b}\}$$
$$= (s-1)(s+1)|\vec{a}|^2 + t(t-2)|\vec{b}|^2 + \{(s-1)(t-2) + (s+1)t\}\vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$$

ここで $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ を用いると

$$\boldsymbol{s^2 + t^2 - 2t - 1 = 0}\cdots ㋐$$

さらに正方形となるための条件は $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$ なので，

$$|(s-1)\vec{a} + t\vec{b}|^2 = |(s+1)\vec{a} + (t-2)\vec{b}|^2$$
$$\therefore (s-1)^2 + t^2 = (s+1)^2 + (t-2)^2$$
$$\therefore s - t = -1\cdots ㋑$$



㋐，㋑より $\boldsymbol{(s,\ t) = (-1,\ 0),\ (1,\ 2)}$

別解

(2) 一般性を失うことなく A(1, 0), B(0, 1) と置いてよい．このとき $\mathrm{C}(s,\ t)$, $\mathrm{D}(s+1,\ t-1)$ となるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (s,\ t-1)$ と計算できる.

四角形 ABCD がひし形になるためには AB = AD が成り立てばよいから，$s^2 + (t-1)^2 = 2$ が満たすべき条件となる.

さらに正方形となるために $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が成り立てばよいから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (s,\ t-1) = \pm(1,\ 1)$ とおける．ここから s, t を求めてもよい.

6.　座標平面上において，曲線 $C: y=e^x\ (x \geqq 0)$ と直線 $\ell: y=(e-2)x+2\ (x \geqq 0)$ および y 軸とで囲まれた図形を D とする。ただし，e を自然対数の底とし，曲線 C と直線 ℓ は点 $(1,\ e)$ で交わる。

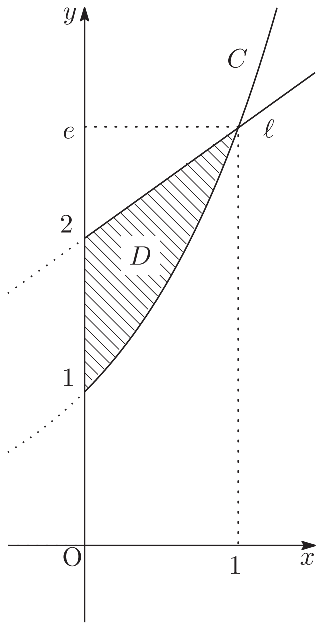
(1)　図形 D の面積は $\boxed{⑲}$ である。

(2)　図形 D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は $\boxed{⑳}$ である。

解答

⑲ $2-\dfrac{1}{2}e$　⑳ $\dfrac{2(e-2)}{3}\pi$

解説



(1)　$\dfrac{1}{2}(e+2)\cdot 1-\displaystyle\int_0^1 e^x dx=\dfrac{1}{2}(e+2)-(e-1)=\mathbf{2-\dfrac{1}{2}e}$

(2)　求める立体の体積を V とすると，

$$V=\pi\int_1^e x^2 dy-1^2\cdot\pi\cdot(e-2)\cdot\frac{1}{3}.$$

ここで $y=e^x$ より，$dy=e^x dx$，$y:1\to e$ のとき $x:0\to 1$ なので，

$$\int_1^e x^2 dy=\int_0^1 x^2 e^x dx=\Big[(x^2-2x+2)e^x\Big]_0^1=e-2$$

これより $V=(e-2)\pi-\left(\dfrac{1}{3}e-\dfrac{2}{3}\right)\pi=\boldsymbol{\dfrac{2(e-2)}{3}\pi}$

講評

1.［データの分析］（やや易）平均と標準偏差の計算．計算法だけ覚えていれば悩むところはない．

2.［確率］（やや易）確率と 2 次方程式の融合だが，やることは数え上げるだけの問題．

3.［図形と式］（やや易）円と直線に関する基本問題．設定も素直．

4.［数列］（標準）和の計算．うまく変形して計算したいところだが，まともに計算してもそう難しくはない．

5.［ベクトル］（標準）与えられた 4 点がひし形，正方形になる条件を問う問題．⑭ で何をしたら良いのか困った受験生もいただろう．

6.［数学Ⅲの積分］（やや易）単純な面積と体積の計算問題．

　昨年に比べて大幅に易化した．凝った設定の問題が姿を消し，全問素直な設定で取り組みやすい．計算量も多くなく，「如何にミスをしないか？」の勝負になりそう．目標は 80%.