医学部進学予備校 メビオ
解答速報

近畿大学医学部（後期） 数学

2019年3月3日実施

1 次の文の $\boxed{}$ に適する数を求めよ．

2^{2019} は $\boxed{ア}$ 桁の数であり，一の位は $\boxed{イ}$ で，十の位は $\boxed{ウ}$ である．また，n が自然数のとき，$\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ の整数部分が 31 桁となる最小の n は $\boxed{エ}$ であり，最大の n は $\boxed{オ}$ である．ただし $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

解答

ア 608　イ 8　ウ 8　エ 171　オ 176

解説

$\log_{10} 2^{2019} = 2019 \log_{10} 2 = 607.719$ より，$10^{607} < 2^{2019} < 2^{608}$ である．よって **608 桁**．また，

$$2^{2019} \equiv 16^{504} \cdot 8 \equiv 6^{504} \cdot 8 \equiv 6 \cdot 8 \equiv 8 \pmod{10}$$

より，一の位の数字は **8** である．さらに，

$$2^{2019} \equiv 1024^{201} \cdot 512 \equiv (-1)^{201} \cdot 12 \equiv -12 \equiv 13 \pmod{25}$$

なので，整数 k を用いて

$$2^{2019} = 25k + 13$$

とおけるが，明らかに 2^{2019} は 4 の倍数なので，

$$25k + 13 \equiv 0 \pmod 4 \iff k + 1 \equiv 0 \pmod 4$$

である．よって，整数 l を用いて $k = 4l + 3$ とおけるので，

$$2^{2019} = 25(4l + 3) + 13 = 100l + 88$$

と表される．したがって，10 の位の数字は **8** である．

題意より，

$$10^{30} \leqq \left(\frac{3}{2}\right)^n < 10^{31}$$

である．各辺に常用対数をとることにより，

$$30 \leqq n \log \frac{3}{2} < 31 \iff \frac{30}{\log 3 - \log 2} \leqq n < \frac{31}{\log 3 - \log 2}$$

である．与えられた数値を代入すると，

$$170.35 \cdots \leqq n < 176.03 \cdots$$

となるので，最小の n は **171**，最大の n は **176** である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 方程式 $\sin\dfrac{\pi}{x}=1$ の正の実数解を大きい順に $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) x_1 を求めよ．

(2) x_n を n を用いて表せ．

(3) $x_n-x_{n+1}<\dfrac{1}{1000}$ となる最小の n を求めよ．

(4) $a_n=x_nx_{n+1}$ とおくとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を n を用いて表せ．

(5) $b_n=x_nx_{n+1}x_{n+2}$ とおくとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ を n を用いて表せ．

解答

(1) $x_1=2$　(2) $x_n=\dfrac{2}{4n-3}$　(3) $n=23$　(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{4n}{4n+1}$　(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{8n(2n+3)}{5(4n+1)(4n+5)}$

解説

(1) $\sin\dfrac{\pi}{x}=1$ より $\dfrac{\pi}{x}=\dfrac{\pi}{2}+2(n-1)\pi$（ただし n は自然数）したがって，x の最大値は $n=1$ のとき．これより，$x_1=\mathbf{2}$.

(2) (1) の考察より $x_n=\boldsymbol{\dfrac{2}{4n-3}}$.

(3) $x_n-x_{n+1}=\dfrac{2}{4n-3}-\dfrac{2}{4n+1}<\dfrac{1}{1000}$．これより，$8000<(4n-3)(4n+1)$.
右辺は n に関して単調増加であるが，$n=22$ のとき $(4n-3)(4n+1)=7565$,
$n=23$ のとき $(4n-3)(4n+1)=8277$，なので，求める最小値は $\boldsymbol{n=23}$.

(4) $a_n=x_nx_{n+1}=\dfrac{4}{(4n-3)(4n+1)}$ なので，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{(4k-3)(4k+1)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)\\&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{4n+1}\\&=\boldsymbol{\frac{4n}{4n+1}}.\end{aligned}$$

(5) $b_n=x_nx_{n+1}x_{n+2}=\dfrac{8}{(4n-3)(4n+1)(4n+5)}$ なので，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{8}{(4k-3)(4k+1)(4k+5)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(4k-3)(4k+1)} - \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 9} \right) + \left(\frac{1}{5\cdot 9} - \frac{1}{9\cdot 13} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} - \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} \right) \\
&= \frac{1}{5} - \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} \\
&= \boldsymbol{\frac{8n(2n+3)}{5(4n+1)(4n+5)}}.
\end{aligned}
$$

3 関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^1 (6t|t-x|+2|x-t|)\,dt$，$g(x)=\displaystyle\int_0^x (6t|t-x|+2|x-t|)\,dt$ とする．

曲線 $C_1: y=f(x), C_2: y=g(x)$ について，次の問いに答えよ．

(1) C_1 と C_2 の共有点の座標を求めよ．

(2) C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答

$|t-x|=|x-t|$ なので $6t|t-x|+2|x-t|=(6t+2)|t-x|$ である．計算の便宜のため不定積分 $F(t)=\displaystyle\int (6t+2)(t-x)\,dt$ を計算しておこう．（ただし積分定数は省略する．）

$$F(t)=\int (6t+2)(t-x)\,dt=\int (6t^2+2t-6xt-2x)\,dt=2t^3+t^2-3xt^2-2xt$$

$f(x)$ について

(i) $x \leqq 0$ のとき $f(x)=\displaystyle\int_0^1 (6t+2)(t-x)\,dt=F(1)-F(0)=-5x+3$

(ii) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $f(x)=\displaystyle\int_0^x \{-(6t+2)(t-x)\}\ dt+\int_x^1 (6t+2)(t-x)\,dt$

$=F(0)+F(1)-2F(x)=3-5x-2(2x^3+x^2-3x^3-2x^2)=2x^3+2x^2-5x+3$

(iii) $1 \leqq x$ のとき $f(x)=\displaystyle\int_0^1 \{-(6t+2)(t-x)\}\,dt=-F(1)+F(0)=5x-3$

また $g(x)$ について

(i) $x \leqq 0$ のとき $g(x)=\displaystyle\int_0^x (6t+2)(t-x)\,dt=F(x)-F(0)=-x^3-x^2$

(ii) $0 \leqq x$ のとき $g(x)=\displaystyle\int_0^x \{-(6t+2)(t-x)\}\,dt=F(0)-F(x)=x^3+x^2$

(1) $f(x)=g(x)$ を解けばよい．

(i) $x \leqq 0$ のとき $f(x)-g(x)=(-5x+3)-(-x^3-x^2)=x^3+x^2-5x+3=(x+3)(x-1)^2$ なので，交点は $(-3,\ 18)$．

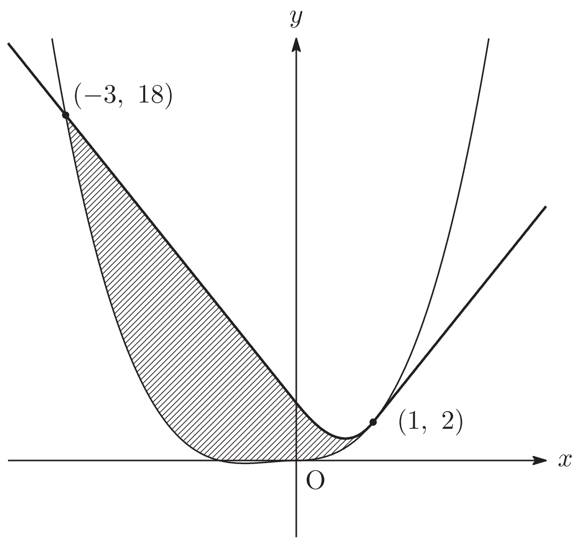
(ii) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $f(x)-g(x)=(2x^3+2x^2-5x+3)-(x^3+x^2)=x^3+x^2-5x+3=(x+3)(x-1)^2$ なので，交点は $(1,\ 2)$．

(iii) $1 \leqq x$ のとき $f(x)-g(x)=(5x-3)-(x^3+x^2)=-x^3-x^2+5x-3=-(x+3)(x-1)^2$ なので，交点は $(1,\ 2)$．

以上より交点は $\mathbf{(-3,\ 18)}$，$\mathbf{(1,\ 2)}$ である．

(2) (1) より $-3 \leqq x \leqq 1$ においては $f(x)-g(x)=(x+3)(x-1)^2$ であり，$f(x)-g(x) \geqq 0$ であることもわかる．従って求める面積 S は

$$S=\int_{-3}^1 (x+3)(x-1)^2\,dx=\frac{(1+3)^4}{12}=\mathbf{\frac{64}{3}}$$



講評

$\boxed{1}$［冪乗数の桁数と下位の桁の数値］（標準）桁数は対数を利用する基本的な問題．十の位の数字も周期性を利用するのだが，mod 4 と mod 25 に分解して考えたりするなどの工夫がないと，計算量が増えて面倒になる．

$\boxed{2}$［数列］（標準）典型的な問題であり，この問題は落とせない．

$\boxed{3}$［絶対値の関数の積分と面積］（やや難）内容的に難しいところはないのだが，場合分けと計算が面倒で，完答するのは難しいだろう．

出題形式は，$\boxed{1}$ 空所補充，$\boxed{2}$ 答のみ記入，$\boxed{3}$ 記述形式と例年通りであった．

難易度は，昨年よりやや易化した．$\boxed{1}$の十の位の数字が難しい．ここは差がつくところ．$\boxed{2}$は典型的な標準問題であるため，ここはしっかり得点したい．$\boxed{3}$(1) の計算をどれだけ正確に乗り切ったかが勝負の分かれ目．後期試験ということも考え，目標は 80%．