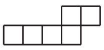
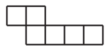
医学部進学予備校
メビオ

解答速報

近畿大学医学部（前期）数学

2019年1月27日実施

1 自然数 n に対して，1 辺の長さが 1 の正方形 n 個を並べて平面上に図形を構成する。ここで，隣接する 2 つの正方形は 1 つの辺とその両端の 2 頂点だけが一致するように並べる。ただし，線対称移動や回転を，必要であれば何回でも用いて，ぴったり重なるものは同じ種類の図形とみなす。

例えば $n=6$ のとき， と  は同じ種類の図形である。

(1) $n=3$ のとき $\boxed{\text{ア}}$ 種類，$n=4$ のとき $\boxed{\text{イ}}$ 種類，$n=5$ のとき $\boxed{\text{ウ}}$ 種類の図形が存在する。

(2) $n=6$ のとき $\boxed{\text{エ}}$ 種類の図形が存在し，このうち立方体の展開図と一致するものは $\boxed{\text{オ}}$ 種類である。

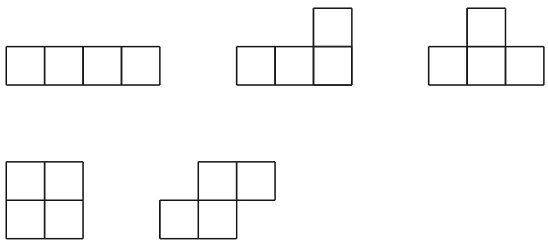
解答

ア 2　イ 5　ウ 12　エ 35　オ 11

解説

(1) • $n=3$ のとき次の 2 通りである．

• $n=4$ のとき次の 5 通りである．

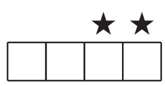


以下では横あるいは縦に連続して並ぶ正方形の個数の最大値が k であるとき，これを「k 連ドミノ」と呼ぶことにしよう．

• $n=5$ のとき

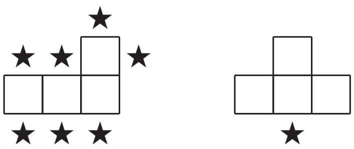
① 5 連ドミノは 1 通り．

② 4 連ドミノは以下の通り（可能な 5 個目の正方形が配置できる場所に★がかいてある．線対称移動あるいは回転で結果的に同じ種類の図形になる箇所には★はつけていない．以下同様）．



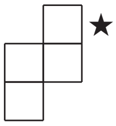
より 2 通り．

③ 3 連ドミノは以下の通り．



より計 8 通り.

④　2 連ドミノは以下の通り.



より 1 通り.

以上により，12 種類できる.

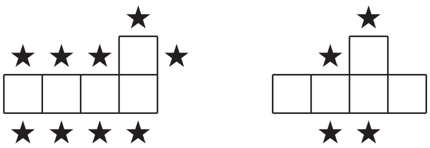
(2)　$n = 6$ のとき

①　6 連ドミノは 1 通り.

②　5 連ドミノは以下の通り（可能な 6 個目の正方形が配置できる場所に★がかいてある．線対称移動あるいは回転で結果的に同じ種類の図形になる箇所には★はつけていない．以下同様).

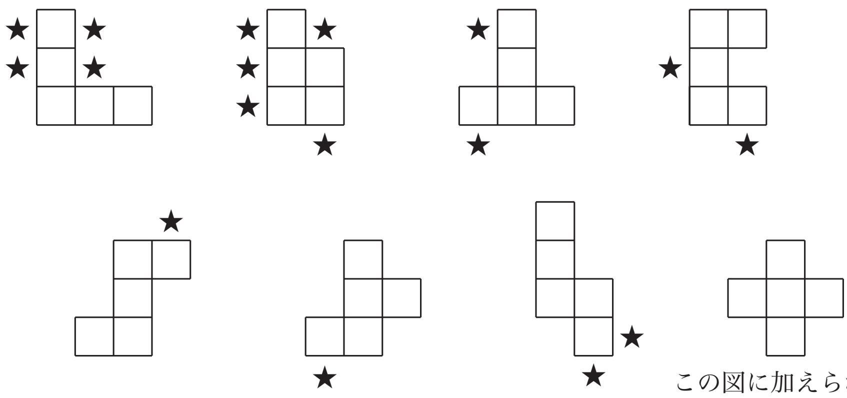
より 3 通り.

③　4 連ドミノは以下の通り.



より計 13 通り.

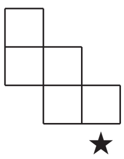
④　3 連ドミノは以下の通り.



この図に加えられる星はない

より 17 通り.

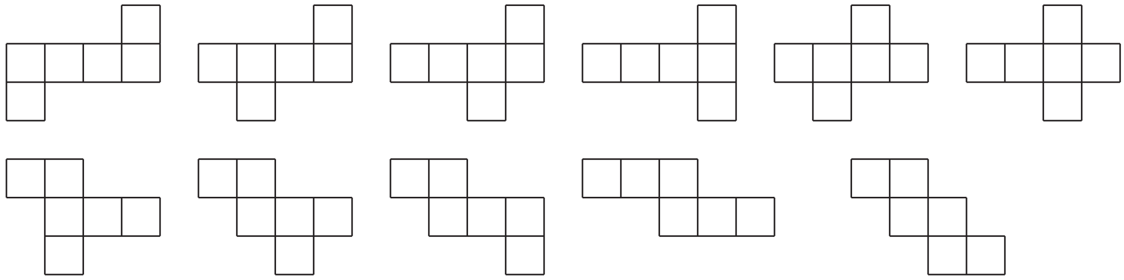
⑤　2 連ドミノは以下の通り.



より 1 通り.

以上により，35 種類できる.

これらのうち立方体の展開図となるものは以下の 11 通り.



$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(\theta)=-2\sin 3\theta+9\cos 2\theta-18\sin\theta-9$ $\left(ただし -\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ について考える。

(1) $x=\sin\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を x を用いて表せ。この関数を $g(x)$ とする。

(2) $f(\theta)$ の最大値およびそのときの θ の値を求めよ。また，$f(\theta)$ の最小値およびそのときの θ の値を求めよ。

(3) 座標平面上で，(1) の関数のグラフ $y=g(x)$ を考える。グラフの y 座標が最大となる点を A，最小となる点を B とするとき，直線 AB と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答

(1) $8x^3-18x^2-24x$

(2) 最大値は $\dfrac{13}{2}$ で $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ のとき．最小値は -34 で $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき．

(3) 面積は $\dfrac{27}{4}$

解説

(1) $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3x-4x^3$, $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2x^2$ より

$$\begin{aligned}f(\theta)&=-2\sin 3\theta+9\cos 2\theta-18\sin\theta-9\\&=-2(3x-4x^3)+9(1-2x^2)-18x-9\\&=\boldsymbol{8x^3-18x^2-24x}\end{aligned}$$

(2) (1) より $g(x)=8x^3-18x^2-24x$ である．ただし $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $-1\leqq x\leqq 1$ である．この範囲での $g(x)$ の最大値，最小値を求めればよい．

$g'(x)=24x^2-36x-24=12(2x+1)(x-2)$ より増減表は次のようになる．

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-2	$\nearrow$	$\frac{13}{2}$	$\searrow$	-34

従って $g(x)$ つまり $f(\theta)$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{13}{2}}$ であり，それは $x=-\dfrac{1}{2}$ つまり $\theta=\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{6}}$ のとき実現される．また 最小値は $\boldsymbol{-34}$ であり，それは $x=1$ つまり $\theta=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$ のとき実現される．

(3) $-1\leqq x\leqq 1$ を考慮して $g(x)$ の最大・最小値を求めると，2 点 A, B は A$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{13}{2}\right)$, B$(1,\ -34)$ となる．

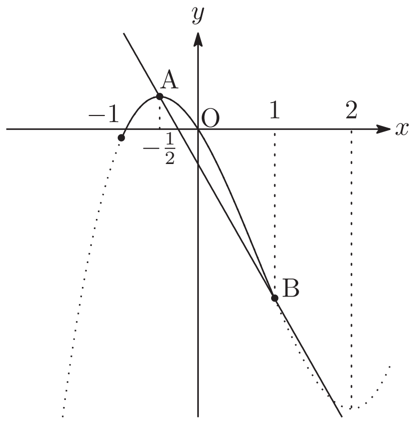
これより直線 AB の方程式は

$$y=\frac{-34-\dfrac{13}{2}}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}(x-1)-34=-27x-7$$

$h(x)=-27x-7$ と置いて $g(x)$ との大小を比較すると

$$\begin{aligned}
&g(x)-h(x)\\
&=8x^3-18x^2-24x-(-27x-7)\\
&=8x^3-18x^2+3x+7\\
&=(2x+1)(x-1)(4x-7)
\end{aligned}$$

従って $-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ の範囲では $g(x)\geqq h(x)$ であることが分かる.



囲む面積 S は

$$\begin{aligned}
S&=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\{g(x)-h(x)\}\,dx\\
&=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(2x+1)(x-1)(4x-7)\,dx\\
&=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(2x+1)(x-1)\{4(x-1)-3\}\,dx\\
&=8\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)^2\,dx-6\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)\,dx\\
&=\frac{8}{12}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4+\frac{6}{6}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3\\
&=\boldsymbol{\frac{27}{4}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数列 a_1, a_2, a_3, $\cdots\cdots$, a_n, $\cdots\cdots$ は初項 a，公差 d の等差数列であり，$a_4 = 15$ かつ $S_{10} > 0$, $S_{11} \leqq 0$ を満たす。ただし，$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ とする。

(1) d のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) a_n $(n > 4)$ のとりうる値の範囲を n を用いて表せ。

(3) S_n が最大となるときの n の値を全て求めよ。また，そのときの S_n を d を用いて表せ。

解答

(1) 条件より，$a_4 = a + 3d = 15 \iff a = -3d + 15 \cdots$ ① なので，

$$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = \frac{10(-6d+30+9d)}{2} > 0 \quad \text{より} \quad d > -10$$
$$S_{11} = \frac{11(2a+10d)}{2} = \frac{11(-6d+30+10d)}{2} \leqq 0 \quad \text{より} \quad d \leqq -\frac{15}{2}$$

を得るから，　$\boldsymbol{-10 < d \leqq -\frac{15}{2}}$.

(2) ①を用いると　$a_n = a + (n-1)d = (n-4)d + 15$　である．$n > 4$ のとき $n - 4 > 0$ であるから，(1) の結果から

$$-10(n-4) + 15 < (n-4)d + 15 \leqq -\frac{15}{2}(n-4) + 15$$
$$\iff \boldsymbol{-10n + 55 < a_n \leqq -\frac{15}{2}n + 45}$$

(3) (2) の結果に $n = 5,\ 6$ を代入すると，

$$5 < a_5 \leqq \frac{15}{2}, \quad -5 < a_6 \leqq 0$$

となる．$a_6 = 0$ となるのは $d = -\frac{15}{2}$ のときである．(1) の結果から $d < 0$ であることを考慮すると，

(i) $d = -\frac{15}{2}$ のとき

$$1 \leqq n \leqq 5 \text{ のとき } a_n > 0, \text{ かつ, } a_6 = 0, \text{ かつ, } n \geqq 7 \text{ のとき } a_n < 0$$

なので，S_n が最大となるのは $n = 5,\ 6$ である．

(ii) $-10 < d < -\frac{15}{2}$ のとき

$$1 \leqq n \leqq 5 \text{ のとき } a_n > 0, \text{ かつ, } n \geqq 6 \text{ のとき } a_n < 0$$

なので，S_n が最大となるのは $n = 5$ である．

また，(i)(ii) いずれの場合も，S_n の最大値は S_5 であり，①を用いると $S_5 = \dfrac{5(2a+4d)}{2} = 75 - 5d$ である．

以上から，

$$\begin{cases} \boldsymbol{d = -\frac{15}{2}} \text{ のときは } \boldsymbol{n = 5,\ 6} \\ \boldsymbol{-10 < d < -\frac{15}{2}} \text{ のときは } \boldsymbol{n = 5} \end{cases} \qquad S_n \text{ の最大値は } \boldsymbol{75 - 5d}$$

的中!!

冬期演習 数学IIB

$a_n=-2+\dfrac{1}{3}(n-1)$，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ であるとき，S_n を最小とする n の値は $\boxed{\text{ア}}$ または $\boxed{\text{イ}}$ である．

講評

$\boxed{1}$［場合の数］（やや難）基本的に数えるしかない問題．きちんと数えられるかで大きく差がつくだろう．「ポリオミノ」と呼ばれる有名なパズルの問題である．

$\boxed{2}$［三角関数と 3 次関数の融合］（やや易）前半は 2 倍角，3 倍角の公式を確認する問題．後半は 3 次関数の最大最小と，囲む面積を計算する問題．基本的であり，失点するわけにはいかないだろう．素早く正確に解いて，他の問題に力を注ぐのがよい．

$\boxed{3}$［等差数列の和］（標準）(1)(2) は易しい．(1) から $\{a_n\}$ が減少列であることが分かるので，(3) では a_n の符号変化に注目すればよいが，(1)(2) をどう利用するか戸惑った受験生も多いかも知れない．また，a_6 が 0 か否かの場合分けをしっかり記述できたかも重要．

出題形式は，$\boxed{1}$ 空所補充，$\boxed{2}$ 答のみ記入，$\boxed{3}$ 記述形式と例年通りであった．

難易度は，昨年に比べて大幅に易化した．$\boxed{1}$の数え上げが難しい．一見とっつきやすいが，この問題は後回しにするのが正解．$\boxed{2}$，$\boxed{3}$は典型的な標準問題であるため，ここはしっかり得点したいところ．目標は 70%．

医学部進学予備校 メビオ
〒540-0033 大阪市中央区石町2-3-12 ベルヴォア天満橋
0120-146-156
https://www.mebio.co.jp/
MeBio Scholastics