医学部進学予備校 メビオ

解答速報

川崎医科大学　数学

2019年1月27日実施

1　半径 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の円に内接する四角形 ABCD において，三角形 ABD は正三角形であるとする。線分 AC と線分 BD の交点を E とし，点 E は BD を $1:2$ に内分する点であるとする。

(1)　$|\overrightarrow{AB}| = \boxed{ア}$，$|\overrightarrow{AD}| = \boxed{イ}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

(2)　$\overrightarrow{AE} = \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\overrightarrow{AD}$ であり，$|\overrightarrow{AE}|^2 = \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である。

(3)　点 A を通る直径の他端を F とすると，

$\overrightarrow{AF} = \dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\overrightarrow{AD}$ であり，$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AE} = \boxed{ソ}$ である。

実数 t を用いて $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AE}$ とおくと，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FC} = \boxed{タ}$ であるから，$t = \dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ となる。

(4)　正三角形 ABD の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{テ}}}{\boxed{ト}}$ であり，四角形 ABCD の面積は $\dfrac{\boxed{ナ}\sqrt{\boxed{ニ}}}{\boxed{ヌネ}}$ である。

解答

解答記号	正解
ア	1
イ	1
$\dfrac{ウ}{エ}$	$\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{オ}{カ}\overrightarrow{AB}+\dfrac{キ}{ク}\overrightarrow{AD}$	$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
$\dfrac{ケ}{コ}$	$\dfrac{7}{9}$

解答記号	正解
$\dfrac{サ}{シ}\overrightarrow{AB}+\dfrac{ス}{セ}\overrightarrow{AD}$	$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$
ソ	1
タ	0
$\dfrac{チ}{ツ}$	$\dfrac{9}{7}$
$\dfrac{\sqrt{テ}}{ト}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
$\dfrac{ナ\sqrt{ニ}}{ヌネ}$	$\dfrac{9\sqrt{3}}{28}$

解説

(1)　正弦定理により $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} \iff |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1.$

$\triangle$ABD は正三角形なので $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 1\cdot 1\cdot\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ である．

(2)　点 E は線分 BD を $1:2$ に内分する点なので $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ であり，

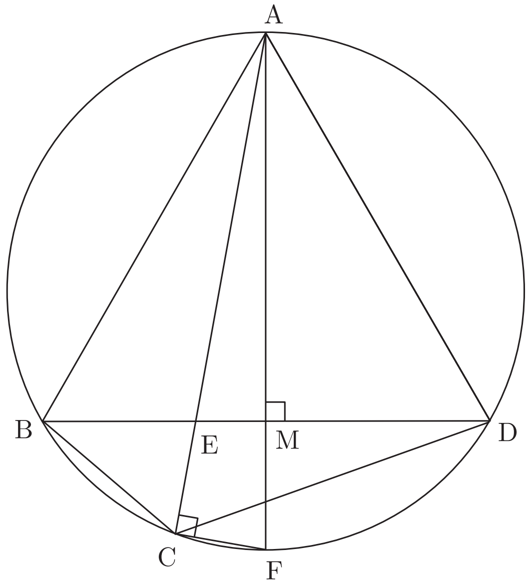
$$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2 = \frac{1}{9}|2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 = \frac{1}{9}(4|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + 4\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}} + |\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2) = \frac{1}{9}(4+2+1) = \frac{7}{9}$$

(3)　BD の中点を M とすると，A，M，F はこの順に一直線上に並び，$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}})$ である．

$|\overrightarrow{\mathrm{AM}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，AF は直径であるから $|\overrightarrow{\mathrm{AF}}| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ なので

$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AF}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|}\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}})$ であり，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}} &= \frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\\
&= \frac{2}{9}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}})\\
&= \frac{2}{9}(2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + 3\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} + |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2)\\
&= 1
\end{aligned}$$



である．AF は直径なので $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{FC}}$，$t \fallingdotseq 0$ に注意して，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FC}} = 0 &\iff \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AF}}) = 0\\
&\iff \overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot(t\overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{AF}}) = 0\\
&\iff t|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}} = 0\\
&\iff \frac{7}{9}t - 1 = 0 \quad \therefore t = \frac{9}{7}
\end{aligned}$$

(4)　正三角形 ABD の面積は $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$．また $\mathrm{CE}:\mathrm{AE} = 2:7$ より，$\triangle$BCD の面積は $\triangle$ABD の $\dfrac{2}{7}$ 倍であるから，四角形 ABCD の面積は $\triangle\mathrm{ABD}\times\dfrac{9}{7} = \dfrac{9\sqrt{3}}{28}$ である．

2 箱 A には赤球 1 個と白球 1 個が，箱 B には赤球 1 個と白球 2 個が入っている。2 つの箱から同時に 1 個ずつ取り出して入れかえる操作を n 回繰り返す。n 回の操作後，箱 A に，赤球が 2 個入っている確率を a_n，赤球が 1 個だけ入っている確率を b_n，赤球が入っていない確率を c_n とする。

(1) $a_1 = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，$b_1 = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) 任意の自然数 n について，

$$a_n + b_n + c_n = \boxed{\text{オ}}$$

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} b_n$$

$$b_{n+1} = a_n + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} b_n + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} c_n$$

が成り立つ。

(3) A，B，C を実数とし，b_n に関する漸化式

$$b_{n+2} + Ab_{n+1} - Bb_n = C$$

が成り立つとする。

(i) $A = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$，$B = \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$，$C = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

(ii) $p_n = b_n - x$ とし，$p_{n+2} + Ap_{n+1} - Bp_n = 0$ が成り立つとする。

このとき，$x = \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

さらに，実数 α，β $(\alpha < \beta)$ が

$$(p_{n+2} - \alpha p_{n+1}) = \beta(p_{n+1} - \alpha p_n)$$

を満たすとする。このとき $\alpha = -\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$，$\beta = \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

このことから，任意の自然数 n について，

$$b_n = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}\alpha^n + \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}}\beta^n + \frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}$$

が成り立つ。

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}}$ となる。

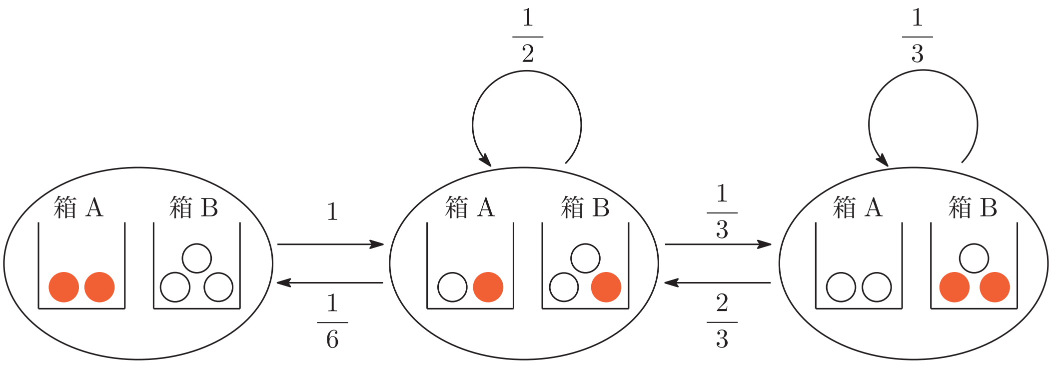
解答

解答記号	正解
$\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$	$\frac{1}{2}$
オ	1
$\frac{\text{カ}}{\text{キ}}$	$\frac{1}{6}$
$a_n+\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}b_n+\frac{\text{コ}}{\text{サ}}c_n$	$a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{2}{3}c_n$
$\frac{\text{シ}}{\text{ス}}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{\text{セ}}{\text{ソタ}}$	$\frac{1}{18}$

解答記号	正解
$\frac{\text{チ}}{\text{ツ}}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{\text{テ}}{\text{ト}}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{\text{ナ}}{\text{ニ}}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{\text{ヌ}}{\text{ネ}}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{\text{ノ}}{\text{ハ}}\alpha^n+\frac{\text{ヒ}}{\text{フヘ}}\beta^n+\frac{\text{ホ}}{\text{マ}}$	$\frac{1}{3}\alpha^n+\frac{1}{15}\beta^n+\frac{3}{5}$
$\frac{\text{ミ}}{\text{ム}}$	$\frac{3}{5}$

解説

下図のように「状態 (a)」,「状態 (b)」,「状態 (c)」を定めると，題意の操作を n 回行うことでそれぞれの状態になる確率が順に a_n, b_n, c_n で表されていることになる．操作前は「状態 (b)」である．



(1)「状態 (b)」から操作を 1 回だけ行うと，

- A から白球，B から赤球を取り出すことにより「状態 (a)」になるので， $a_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ である．
- A, B からともに赤球を取り出すか，または A, B からともに白球を取り出すことにより「状態 (b)」になるので， $b_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ である．

(2) 操作を n 回行った結果は，必ず「状態 (a)」,「状態 (b)」,「状態 (c)」のどれかになるので，$a_n + b_n + c_n = 1$ ……① である．また，上の状態遷移図から，次の漸化式が成り立つ．

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{6}b_n & \cdots② \\ b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n & \cdots③ \end{cases}$$

(3) 条件式①, ②, ③を用いて，以下のような過程で，数列 $\{b_n\}$ に関する漸化式を導くことができる．

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{2}{3}c_{n+1} && \text{(③式より)} \\ &= a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{2}{3}(1 - a_{n+1} - b_{n+1}) && \text{(①式で，} c_{n+1} = 1 - a_{n+1} - b_{n+1} \text{として代入)} \\ &= \frac{1}{3}a_{n+1} - \frac{1}{6}b_{n+1} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}b_n - \frac{1}{6}b_{n+1} + \frac{2}{3} && \text{(②式より)} \\ &= -\frac{1}{6}b_{n+1} + \frac{1}{18}b_n + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

この結果から， $b_{n+2} + \frac{1}{6}b_{n+1} - \frac{1}{18}b_n = \frac{2}{3}$ …④ を得る．

(i) ④の結果と設問中にある漸化式 $b_{n+2} + Ab_{n+1} - Bb_n = C$ とを比較すると， $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{18}$, $C = \frac{2}{3}$ であることがわかる．

(ii) $p_n = b_n - x$ より $b_n = p_n + x$．これを④の b_{n+2}, b_{n+1}, b_n のそれぞれに代入すると，

$$(p_{n+2} + x) + \frac{1}{6}(p_{n+1} + x) - \frac{1}{18}(p_n + x) = \frac{2}{3}$$

$$\iff p_{n+2} + \frac{1}{6}p_{n+1} - \frac{1}{18}p_n = \frac{2}{3} - \frac{10}{9}x$$

この結果と設問中にある漸化式 $p_{n+2} + Ap_{n+1} - Bp_n = 0$ とを比較すると $\frac{2}{3} - \frac{10}{9}x = 0$ であるから，

$x=\dfrac{3}{5}$ を得る．

ここで，数列 $\{p_n\}$ についての漸化式　$p_{n+2}+\dfrac{1}{6}p_{n+1}-\dfrac{1}{18}p_n=0\ \cdots⑤$　について考える．

まず，p_1，p_2 の値を求めることにする．

$(a_1,\ b_1,\ c_1)=\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}\right)$ により，③から $b_2=a_1+\dfrac{1}{2}b_1+\dfrac{2}{3}c_1=\dfrac{23}{36}$ となる．従って，$p_1=b_1-x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{5}=-\dfrac{1}{10}$，$p_2=b_2-x=\dfrac{23}{36}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{7}{180}$ である．

次に⑤の特性方程式の解が $-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{6}$ であることから，⑤は次の 2 通りの関係式へと変形できる．

$$\begin{aligned} p_{n+2}+\frac{1}{3}p_{n+1} &= \frac{1}{6}\left(p_{n+1}+\frac{1}{3}p_n\right) && \cdots⑥ \\ p_{n+2}-\frac{1}{6}p_{n+1} &= -\frac{1}{3}\left(p_{n+1}-\frac{1}{6}p_n\right) && \cdots⑦ \end{aligned}$$

⑥, ⑦より，$\alpha=-\dfrac{1}{3}$，$\beta=\dfrac{1}{6}$ であることがわかる．この結果から，

$$\begin{aligned} p_{n+1}+\frac{1}{3}p_n &= \left(p_2+\frac{1}{3}p_1\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{180}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{30}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} \\ p_{n+1}-\frac{1}{6}p_n &= \left(p_2-\frac{1}{6}p_1\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{18}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} \end{aligned}$$

この 2 式を辺々引いて

$$\frac{1}{2}p_n=\frac{1}{30}\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{30}\beta^n+\frac{1}{6}\alpha^n$$

$$\therefore\ p_n=\frac{1}{3}\alpha^n+\frac{1}{15}\beta^n=b_n-\frac{3}{5}$$

$$\therefore\ b_n=\frac{1}{3}\alpha^n+\frac{1}{15}\beta^n+\frac{3}{5}$$

最後に $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n=\lim_{n\to\infty}\beta^n=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{3}{5}$ となる．

川崎医科大学模試（1 月 6 日実施）でも確率漸化式を出題！

n は自然数とする。さいころを n 回振るとき，k 回目に出た目を a_k $(1 \leqq k \leqq n)$ とし，a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n のすべての積を P_n とする。

(1)〜(3)（略）

(4) 数列 $\{b_k\}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ を次のように定義する。

$a_k \leqq 3$ のとき $b_k = a_k$
$a_k \geqq 4$ のとき $b_k = 0$

このとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ が 3 の倍数となる確率を q_n とすると，

$$q_1 = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}},\ q_2 = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である。また，q_n を n で表すと

$$q_n = \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{ヘ}}}\right)^{n-1} + \frac{1}{\boxed{\text{ホ}}}$$

である。

3 $0 \leqq t \leqq \pi$ とする。原点を O とし，点 A の座標を $(\cos t,\ \sin t)$ とする。点 O を，点 A を中心に時計回りに $3t$ 回転移動させた点を P とし，点 P の座標を $(f(t),\ g(t))$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ により，

$$f(t) = \cos t \boxed{ア} \cos \boxed{イ} t,$$
$$g(t) = \sin t \boxed{ウ} \sin \boxed{エ} t$$

である。ここで，$\boxed{ア}$ と $\boxed{ウ}$ は，それぞれ，符号 +，− のいずれかである。

(2) $t = a$ において $f(t)$ が最大値をとるとき $\cos a = \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ であり，$f(a) = \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である。

(3) $0 < c < \pi$ とし，$t = c$ のとき点 P は原点にあるとする。

(i) $c = \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\pi$ である。

(ii) $\displaystyle\int_0^c \sin^2 t\,dt = \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\pi + \frac{\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}},$

$\displaystyle\int_0^c \sin t \sin 2t\,dt = \frac{\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}$ である。

(iii) t が $0 \leqq t \leqq c$ の範囲を動くとき，点 P が描く曲線で囲まれる図形の面積を S とする。

$S = \displaystyle\int_0^c g(t)f'(t)dt$ が成り立つことを用いると，$S = \dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\pi$ である。

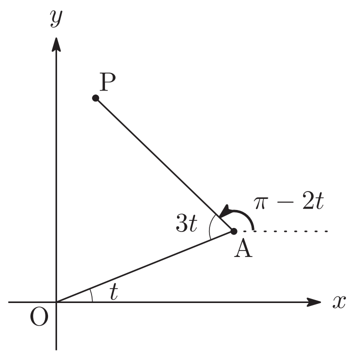
解答

解答記号	正解
$\cos t$ ア $\cos$ イ t	$\cos t - \cos 2t$
$\sin t$ ウ $\sin$ エ t	$\sin t + \sin 2t$
$\dfrac{オ}{カ}$	$\dfrac{1}{4}$
$\dfrac{キ}{ク}$	$\dfrac{9}{8}$

解答記号	正解
$\dfrac{ケ}{コ}\pi$	$\dfrac{2}{3}\pi$
$\dfrac{サ}{シ}\pi + \dfrac{\sqrt{ス}}{セ}$	$\dfrac{1}{3}\pi + \dfrac{\sqrt{3}}{8}$
$\dfrac{\sqrt{ソ}}{タ}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
$\dfrac{チ}{ツ}\pi$	$\dfrac{1}{3}\pi$

解説

(1)　xy 平面において x 軸の正の向きから反時計回りを正として測った角を偏角と呼ぶことにする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の偏角は t であるから $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ の偏角は $\pi+t$ である．$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を時計回りに $3t$ だけ回転したものが $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の偏角は $(\pi+t)-3t=\pi-2t$ である．従って，



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=(\cos t,\ \sin t)+(\cos(\pi-2t),\ \sin(\pi-2t))\\&=(\cos t,\ \sin t)+(-\cos 2t,\ \sin 2t)\\&=(\cos t-\cos 2t,\ \sin t+\sin 2t)\end{aligned}$$

よって $f(t)=\cos t-\cos 2t,\ g(t)=\sin t+\sin 2t$ である．

(2)　$0\leqq t\leqq\pi$ より $-1\leqq\cos t\leqq 1$ であり，また

$$\begin{aligned}f(t)&=\cos t-(2\cos^2 t-1)\\&=-2\left(\cos t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}\end{aligned}$$

であるから，$\cos t=\dfrac{1}{4}$ のとき $f(t)$ は最大値 $\dfrac{9}{8}$ をとる．従って $\cos a=\dfrac{1}{4}$ であり，$f(a)=\dfrac{9}{8}$ である．

(3) (ｉ)　$f(c)=-2\cos^2 c+\cos c+1=-(\cos c-1)(2\cos c+1)=0$ より $\cos c=1,\ -\dfrac{1}{2}$.

また $g(c)=\sin c+2\sin c\cos c=\sin c(1+2\cos c)=0$ より $\sin c=0$ または $\cos c=-\dfrac{1}{2}$.

$0<c<\pi$ を考慮すると $\cos c=-\dfrac{1}{2}$ であり，$c=\dfrac{2}{3}\pi$ である．

(ii)　$c=\dfrac{2}{3}\pi$ なので，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sin^2 t\,dt&=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt\\&=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}\\&=\frac{1}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

また，積→和の変形により，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sin t\sin 2t\,dt&=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\cos 3t-\cos t)dt\\&=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin 3t-\sin t\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

(iii)

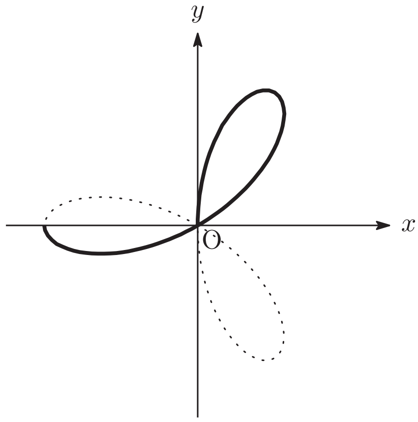
$$S = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} g(t)f'(t)dt$$
$$= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\sin t + \sin 2t)(-\sin t + 2\sin 2t)dt$$
$$= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (-\sin^2 t + \sin t \sin 2t + 2\sin^2 2t)dt$$

となる．被積分関数のうち，$-\sin^2 t$ と $\sin t \sin 2t$ については (ii) の結果を利用できる．また，

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} 2\sin^2 2t\, dt = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (1-\cos 4t)dt$$
$$= \left[t - \frac{1}{4}\sin 4t \right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$= \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

であるから，

$$S = -\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\pi$$



（参考図．上の実線が題意の曲線である）

的中!!

メビオ直前期テキスト（1 月）

座標平面上の原点 O を中心とする半径 2 の円 C_1 がある．半径 1 の円 C_2 が C_1 に外接しながら滑ることなく転がるとき，C_2 上の定点 P が描く曲線について考える．C_2 の中心を Q とし，Q が点 (3, 0) にあるとき P は点 (2, 0) にあるとする．x 軸の正の方向から線分 OQ を測った角 θ が $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で変化するとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の成分および P の座標を θ で表せ．

(2) P の x 座標の最大値を求めよ．

(3) P の描く軌跡と x 軸，y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(4) P の描く軌跡の長さを求めよ．

講評

$\boxed{1}$［ベクトル］（易）直径に対する円周角が 90° であるということを用いて円周上の点を求める，というのは典型的な解法ではあるが，本問ではそれが誘導として与えられているのでより容易な出題となっていた．また，最後の四角形の面積は比を用いて効率よく求めたい．

$\boxed{2}$［確率漸化式］（やや難）3 状態の確率漸化式．状態遷移図の書き方を知っていれば立式は容易だが，慣れない受験生には難しいだろう．後半は 3 項間漸化式を誘導に乗って解くのだが，やや計算量が多いので，作業を正確にできるかどうかが問われている．

$\boxed{3}$［パラメータで表された曲線］（標準）(1) で，三角関数を用いてベクトルの成分を表すことになるが，この作業で戸惑った受験生も多いかも知れない．x 軸の正の向きから反時計回りに角を測る，という原則が重要である．(1) を乗り切ればあとは計算主体であり難しくはない．最後の面積も，定積分の立式が与えられているためそれを計算するのみである．

計算量は例年通り多いが昨年度と比較するとやや軽くなり，方針が立ちやすいものの割合も増えたため，昨年より易化したと言える．$\boxed{1}$, $\boxed{3}$ を完答に近いところまで仕上げ，$\boxed{2}$ (3) の中盤くらいまでを正解したいところ．目標点は 70%．