医学部進学予備校 メビオ 解答速報

関西医科大学（後期）数学

2019年3月2日実施

I　正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ が $2x^2+2y^2+z^2+2xy-2xz-2yz=9$ を満たすとき，$x+y+z$ の最大値を求めよ。

解答

与式を変形すると $x^2+y^2+(x+y-z)^2=9$ となる．これを満たす正の整数 $x,\ y,\ z$ の組を調べる．
$(x,\ y,\ x+y-z)=(1,\ 2,\ \pm2),\ (2,\ 1,\ \pm2),\ (2,\ 2,\ \pm1)$ が分かるので，
$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 1),\ (1,\ 2,\ 5),\ (2,\ 1,\ 1),\ (2,\ 1,\ 5),\ (2,\ 2,\ 3),\ (2,\ 2,\ 5)$ の 6 通りが求まる．これより $x+y+z$ の最大値は **9** となる．

II　実数 a, b を用いて表される x の 4 次方程式 $x^4+4ax^3+2(2b-1)x^2+4ax+1=0$ のすべての解が，複素数平面上で原点から等距離にある。この条件を満たす解が存在するような a, b の条件を求め，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を ab 平面上に図示せよ。

$\boxed{\text{解答}}$

$f(x)=x^4+4ax^3+2(2b-1)x^2+4ax+1=0$ の重複を含めた複素数解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ とおくと，解と係数の関係より $\alpha\beta\gamma\delta=1$ である．題意より $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=|\delta|$ であるから，$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=|\delta|=1$ でなければならない．従って $f(x)=0$ が実数解を持つとするとそれは 1 または -1 でなければならない．

$f(x)=0$ が虚数解 α を持つとしよう．$f(x)$ は実数係数の整式だから $\overline{\alpha}$ も $f(x)=0$ の解である．$|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}=1$ より $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ であり，その場合 $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\alpha+\overline{\alpha}$ は実数ということになる．

$f(x)=0$ は $x=0$ を解に持たないので，両辺を x^2 で割って

$$\begin{aligned} & f(x)=x^4+4ax^3+2(2b-1)x^2+4ax+1=0 \\ \iff\ & x^2+4ax+2(2b-1)+\frac{4a}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \\ \iff\ & \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4a\left(x+\frac{1}{x}\right)+4b-4=0 \end{aligned}$$

$x+\dfrac{1}{x}=t$ として $g(t)=t^2+4at+4b-4$ とおく．$f(x)=0$ の虚数解 $x=\alpha$ に対しても $t=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ は実数であったから，$g(t)=0$ は必ず実数解を持つ．その解の持ち方について

- $g(t)=0$ が $t=-2$ を解に持つ場合，それに対応する $f(x)=0$ の解は $x=-1$ (重解) である．
- $g(t)=0$ が $t=2$ を解に持つ場合，それに対応する $f(x)=0$ の解は $x=1$ (重解) である．
- $g(t)=0$ が $-2<t<2$ に解を持つ場合，それに対応する $f(x)=0$ の解は絶対値が 1 の 2 つの虚数解である．
- $g(t)=0$ が $t<-2$ または $2<t$ の実数解を持つ場合は $f(x)=0$ は ±1 以外の実数解を持ってしまうので不適である．

従って題意を満たすためには t の 2 次方程式 $g(t)=0$ が $-2\leqq t\leqq 2$ に 2 つの実数解（重解を含む）を持つことが必要十分であり，そのためには次が成り立つことが必要十分である．

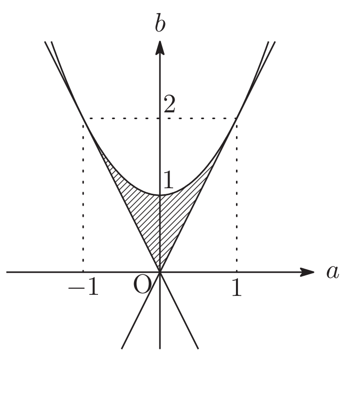
① $g(t)=0$ の判別式が 0 以上 $\left(\iff \dfrac{D}{4}=4a^2-4b+4\geqq 0 \iff b\leqq a^2+1\right)$

② $-2\leqq$ 軸 $\leqq 2$ $(\iff -2\leqq -2a\leqq 2 \iff -1\leqq a\leqq 1)$

③ $g(-2)\geqq 0$ $(\iff -8a+4b\geqq 0 \iff b\geqq 2a)$

④ $g(2)\geqq 0$ $(\iff 8a+4b\geqq 0 \iff b\geqq -2a)$

以上を図示すると次の通り．（図の斜線部．境界はすべて含む．）



Ⅲ　A, B の 2 チームが対戦するある競技では，次のような方法でチームの勝ち負けを決定する。

競技の概要：　両チームにはそれぞれ 5 人の競技者がおり，1 人ずつ交互に試行を行い，それぞれ成功と失敗が決まる。A チームの競技者は奇数番目に，B チームの競技者は偶数番目に試行する。

勝敗の決定：　成功した試行数の多いチームが勝ちチーム，少ないチームが負けチームとなる。なお、全員の試行が終了した時点で，成功した試行数が両チーム同数の場合は，引き分けとする。

特別事項：　ある試行が終了した時点で，それよりも後の試行の結果にかかわらず両チームの勝ち負けが確定する場合には，それよりも後の試行を行わない。

一人の競技者が試行に成功する確率を $\dfrac{1}{2}$ とするとき，以下の問に答えよ。

(1)　最も少ない試行数で勝ち負けが確定するのは，両チームあわせて何番目の競技者の試行が終了した時点かを答えよ。またそれが起こる確率を求めよ。

(2)　7 番目の競技者が試行を終了した時点で勝ち負けが確定する確率を求めよ。

(3)　9 番目の競技者が試行を終了した時点で勝ち負けが確定するときに，A チームが勝ちチームとなる条件付き確率を求めよ。

(4)　引き分けとなる確率を求めよ。

メビオ注：この問題には以下のような訂正が入っている.

- 「競技の概要」の部分
  誤 $\cdots$，1 人ずつ交互に試行を行い，$\cdots$
  ↓
  正 $\cdots$，1 人ずつ交互に<u>各々 1 回ずつ</u>試行を行い，$\cdots$
- 「勝敗の決定」の部分
  誤 $\cdots$ 両チーム同数の場合は，引き分けとする。
  ↓
  正 $\cdots$ 両チーム同数の場合は，引き分けとする。
  <u>ただし，両チームすべての競技者の試行が失敗した場合も，引き分けとする。</u>
- 上記以外にも板書で「競技の概要」の末尾に「なお一人の競技者は 1 回しか試行できない。」の文章を追加するように指示されている。

$\boxed{\text{解答}}$

A チームの成功数を a， B チームの成功数を b とする.

(1)　最も少ない試行数で勝ち負けが確定するのは **6 番目の競技者の試行が終了した時点** であり，このとき

$$(a,\ b) = (3,\ 0) \text{ または } (a,\ b) = (0,\ 3)$$

であるから，求める確率は $2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \boldsymbol{\dfrac{1}{32}}$

(2)　7 番目の競技者が試行を終了した時点で勝ち負けが確定するのは以下の場合である.

$(a,\ b)$（6番目終了時点）	7番目	確率
$(3,\ 1)$	成功	$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \times {}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{128}$
$(2,\ 0)$	成功	${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{128}$
$(1,\ 3)$	失敗	${}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{128}$
$(0,\ 2)$	失敗	$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \times {}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right) \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{128}$

以上により，求める確率は $\dfrac{3}{128}+\dfrac{3}{128}+\dfrac{3}{128}+\dfrac{3}{128}=\mathbf{\dfrac{3}{32}}$ である.

(3)　9番目の競技者が試行を終了した時点で勝ち負けが確定するのは以下の場合である.

①　A チームが勝ちチームとなるのは

$(a,\ b)$（8番目終了時点）	9番目	確率
$(4,\ 3)$	成功	$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \times {}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right) \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{2^9}$
$(3,\ 2)$	成功	${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right) \times {}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{24}{2^9}$
$(2,\ 1)$	成功	${}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \times {}_4\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{24}{2^9}$
$(1,\ 0)$	成功	${}_4\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{2^9}$

の場合があるので，その確率は $\dfrac{4+24+24+4}{2^9}=\dfrac{7}{64}$ である.

②　B チームが勝ちチームとなるのは①の $(a,\ b)$ をそれぞれ入れ替えたうえで9番目の競技者が失敗する場合あるから，この確率は①の場合と同じ $\dfrac{7}{64}$ である.

以上により9番目の競技者が終了した時点で勝ち負けが確定するときに，A チームが勝ちチームとなる条件付き確率は，

$$\frac{(①の確率)}{(①の確率)+(②の確率)}=\frac{\dfrac{7}{64}}{\dfrac{7}{64}+\dfrac{7}{64}}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

である.

注：A，B の成功と失敗をすべて入れ替えたものをペアにして考えるとこの結果は当然とも言える.

(4)　引き分けとなるのは全員の試行が終了した時点で

$(a,\ b)$	確率
$(0,\ 0)$	$\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right\}^2 = \dfrac{1}{2^{10}}$
$(1,\ 1)$	$\left\{{}_5\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\right\}^2 = \dfrac{5^2}{2^{10}}$
$(2,\ 2)$	$\left\{{}_5\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right\}^2 = \dfrac{10^2}{2^{10}}$
$(3,\ 3)$	$\left\{{}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}^2 = \dfrac{10^2}{2^{10}}$
$(4,\ 4)$	$\left\{{}_5\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\left(\dfrac{1}{2}\right)\right\}^2 = \dfrac{5^2}{2^{10}}$
$(5,\ 5)$	$\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right\}^2 = \dfrac{1}{2^{10}}$

となる場合であるから，求める確率は $\dfrac{1+5^2+10^2+10^2+5^2+1}{2^{10}} = \mathbf{\dfrac{63}{256}}$

Ⅳ　xy 平面上に，2 次関数 $f(x) = x^2 + x$ を用いて $y = f(x)$ で表される曲線 C がある。この曲線 C 上の点 $(a_n,\ f(a_n))$ における C の接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_{n+1} とする。このように，a_1 から順に $a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ を定める。$a_1 = \sqrt{2}+1$ とするとき，以下の問に答えよ。ただし n は自然数とする。

(1)　点 $(a_n,\ f(a_n))$ における C の接線の方程式を a_n を用いて表せ。

(2)　すべての n について $a_n > 0$ であることを示し，a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(3)　$b_n = \dfrac{1}{a_n} + 1$ とおくとき，b_n と b_{n+1} の関係式を求め，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(4)　$a_7 < 10^{-k}$ を満たす最大の自然数 k を求めよ。ただし，必要があれば $\log_{10} 2$ を 0.3010 として計算してもよい。

解答

(1)　$f'(x) = 2x+1$ より，求める接線は $\boldsymbol{y} = (2a_n+1)(x-a_n) + {a_n}^2 + a_n \boldsymbol{= (2a_n+1)x - {a_n}^2}$

(2)　数学的帰納法で示す．$a_1 > 0$ は明らか．

$a_n > 0$ と仮定すると，(1) の接線と $y = 0$ との交点より $\boldsymbol{a_{n+1} = \dfrac{{a_n}^2}{2a_n+1}}$ となるので $a_{n+1} > 0$ となる．

したがって，すべての自然数 n について $a_n > 0$ である．　(証明終)

(3)　(2) の関係式より

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n+1}{{a_n}^2} \iff \frac{1}{a_{n+1}} + 1 = \frac{{a_n}^2 + 2a_n + 1}{{a_n}^2} = \left(\frac{1}{a_n} + 1\right)^2$$

したがって，$\boldsymbol{b_{n+1} = {b_n}^2}$ である．

さらに，$\log_2 b_{n+1} = 2\log_2 b_n$ と，$b_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + 1 = \sqrt{2}$ より，$\log_2 b_n = 2^{n-1}\log_2 b_1 = 2^{n-2}$.

したがって，$\boldsymbol{b_n = 2^{2^{n-2}}}$ である．

(4)　$b_7 = 2^{2^5} = 2^{32}$ である．また，

$$a_7 < 10^{-k} \iff \frac{1}{b_7 - 1} < 10^{-k} \iff b_7 > 10^k + 1$$

であるが，$\log_{10} b_7 = 32\log_{10} 2 = 9.632$ より $b_7 = 10^{9.632} < 10^{10} + 1$.
$\log_{10} 2\cdot 10^9 = 9 + \log_{10} 2 = 9.3010$ より $b_7 > 2\cdot 10^9 > 10^9 + 1$.
したがって，$a_7 < 10^{-k}$ を満たす最大の自然数 k は，$\boldsymbol{k = 9}$ である．

講評

Ⅰ［整数問題］(標準) 条件式から「$x,\ y,\ z$ はそう大きな整数にはならないだろう」という感覚がほしい．条件式を，負の値（$-2xz,\ -2yz$）を平方式の中に取り込む向きで変形できればよい．

Ⅱ［高次方程式］(やや難) 4 次方程式の解の絶対値に関する問題．定数項を見て解の絶対値が 1 となること，背反方程式であることに気づくことが糸口となる．$|\alpha| = 1$ のとき $\overline{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$ もすぐに連想してほしい．

Ⅲ［確率］(やや難) いわゆる「サッカーの PK 戦」をモデルにした問題．ルールを見極めて慎重に数え上げればよい．

Ⅳ［数列（漸化式と対数の融合)］(やや難) 接線から漸化式を導き，対数を用いて不等式の評価をしていく問題．(2) は帰納法で簡単に示して良いだろう．(3) で誘導に乗れるか，(4) は不等式の評価をいかに記述で仕上げるかがポイントとなる．

2019 前期試験と同様，後期試験も「全問記述形式」に変わった．前期試験に較べ，論証力を試される問題が増え，計算量は減った．より記述力が試されるセットとなっている．

難易度に関しては「2018 後期試験に較べて易しくなった」と言えるが，形式が大きく異なるため単純な比較はできない．むしろ「2019 前期試験に較べてやや難しい」という表現がよいかもしれない．

標準レベルからやや難レベルの問題がずらりと並んでおり，実力に応じて大きく点数の差が出るだろう．Ⅰは完答したい．Ⅱ, Ⅲ, Ⅳでどこまで得点を伸ばせるかの勝負．後期試験の定員も考慮に入れると，目標は 70%.