医学部進学予備校 メビオ 解答速報

関西医科大学　数学

2019年1月26日実施

I　53 で割ると 5 余り 61 で割ると 6 余る最小の自然数を求めよ。

解答

「53 で割ると 5 余り 61 で割ると 6 余る自然数」を N とする．
m, n を整数とすれば，N は次の 2 通りの式で表すことができる．

「53 で割ると 5 余る自然数」として　$N = 53m + 5$
「61 で割ると 6 余る自然数」として　$N = 61n + 6$

よって，

$$N = \underline{53m + 5 = 61n + 6}$$

と表すことができ，下線部を整理すると

$$53m - 61n = 1 \quad \cdots ⓐ$$

である．ここで不定方程式 ⓐ について考え，この方程式を満たす $(m,\ n)$ の一般解を求めることにする．

まず，$(m,\ n) = (-23,\ -20)$ を特殊解に持つことが分かる（下表を参照）．

		$53m - 61n$	m	n
	①	61	0	−1
	②	53	1	0
(① − ② =)	③	8	−1	−1
(③ × 6 =)	④	48	−6	−6
(② − ④ =)	⑤	5	7	6
(③ − ⑤ =)	⑥	3	−8	−7
(⑤ − ⑥ =)	⑦	2	15	13
(⑥ − ⑦ =)	⑧	1	**−23**	**−20**

よって，この特殊解を用いて一般解を求めると，

$$\begin{array}{rlcll} & 53m & - & 61n & = 1 \\ -) & 53(\mathbf{-23}) & - & 61(\mathbf{-20}) & = 1 \\ \hline & 53(m+23) & - & 61(n+20) & = 0 \end{array}$$

であることから，

$$53(m+23) \ = \ 61(n+20) \ = \ 53 \cdot 61\,k \quad (k \text{ は整数})$$

と表すことができ，この結果から

$$(m,\ n) = (61k - 23,\ 53k - 20)$$

を得られる．これが $(m,\ n)$ の一般解である．従って，

$$N \ = \ 53m+5 = 53(61k-23)+5 \ = \ 3233k-1214$$

と表され，N は自然数であるので，$k=1$ のときに最小値 $\boldsymbol{N=2019}$ をとる．

的中!!

メビオ後期演習テキスト（12 月期）

(1)　$71x-33y=1$ を満たす整数 $x,\ y$ の組を 1 つ求めよ．

(2)　71 で割ると 2 余り，33 で割ると 7 余る自然数のうち，4 桁で最小のものを求めよ．

II　$\overrightarrow{a} = (2\cos\theta - \sin\theta,\ \cos\theta + 2\sin\theta)$, $\overrightarrow{b} = (-\cos\theta + 2\sin\theta,\ 2\cos\theta + \sin\theta)$ とおく。ただし，$0 < \theta < \pi$ とする。以下の問に答えよ。

(1)　$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が垂直であるとき θ を求めよ。

(2)　$2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ の大きさを θ を用いて表せ。またその値の範囲を求めよ。

(3)　$\theta = \dfrac{5}{12}\pi$ であるとき，$2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a} - k\overrightarrow{b}$ が垂直となる k の値を求めよ。

解答

(1)　$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ となればよい．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= -2\cos^2\theta + 5\sin\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta \\ &\quad + 2\cos^2\theta + 5\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta \\ &= 10\sin\theta\cos\theta \\ &= 5\sin 2\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

より，$0 < 2\theta < 2\pi$ を考慮して $2\theta = \pi$．従って $\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{2}}$．

(2)　成分計算により，

$$2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (3\cos\theta,\ 4\cos\theta + 5\sin\theta)$$

を得るので，

$$\begin{aligned}|2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| &= \sqrt{9\cos^2\theta + 16\cos^2\theta + 40\sin\theta\cos\theta + 25\sin^2\theta} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{25 + 20\sin 2\theta}}\end{aligned}$$

となる．$0 < 2\theta < 2\pi$ より $-1 \leqq \sin 2\theta \leqq 1$ であるから，

$$\boldsymbol{\sqrt{5} \leqq |2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| \leqq 3\sqrt{5}}$$

(3)　$(2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} - k\overrightarrow{b}) = 0$ となればよい．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{a}|^2 &= 4\cos^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta \\ &\quad + \cos^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + 4\sin^2\theta \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{b}|^2 &= \cos^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta + 4\sin^2\theta \\ &\quad + 4\cos^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta \\ &= 5\end{aligned}$$

である．また $\theta = \dfrac{5}{12}\pi$ より　$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 5\sin 2\theta = \dfrac{5}{2}$　であるから，

$$\begin{aligned}(2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} - k\overrightarrow{b}) &= 2|\overrightarrow{a}|^2 + (1-2k)\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - k|\overrightarrow{b}|^2 \\ &= 10 + (1-2k) \cdot \frac{5}{2} - 5k \\ &= 0\end{aligned}$$

より，$\boldsymbol{k = \dfrac{5}{4}}$.

III　xy 平面上の $x>0$ の領域に，2 次関数 $f(x)=x^2+bx+2$（ただし $b \geqq 0$）を用いて $y=f(x)$ で表される放物線がある。この放物線上の点 A_n における $y=f(x)$ の法線と y 軸との交点の y 座標が，放物線上の点 A_{n+1} の y 座標と一致するように，A_1 から順に $A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ を定める。A_n の y 座標を a_n とすると，数列 $\{a_n\}$ が初項 a, 項差 d の等差数列となるとき，以下の問に答えよ。

(1)　b の値を求めよ。

(2)　d の値を求めよ。

(3)　a の値が満たすべき条件を不等式を用いて表せ。

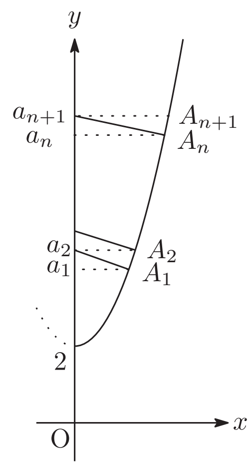
注：「項差」は「公差」の間違いだと思われる。

解答

(1)　A_n の座標を $(x_n,\ a_n)$ とする．$a_n=f(x_n)={x_n}^2+bx_n+2$ である．また，条件より $a_n=a+(n-1)d$ も成り立っている．

$f'(x)=2x+b$ より A_n における法線の方程式は

$$y=-\frac{1}{2x_n+b}(x-x_n)+a_n$$



であり，その y 切片は $\dfrac{x_n}{2x_n+b}+a_n$ である．これが a_{n+1} に一致するので

$$a_{n+1}=\frac{x_n}{2x_n+b}+a_n$$

これに $a_{n+1}=a_n+d$ を代入して整理すると $(2x_n+b)d=x_n$ つまり

$$(2d-1)x_n+bd=0\cdots①$$

を得る．

$d=0$ のときは a_n つまり x_n は定数列になるが，① に代入すると $x_n=0$ となる．これは $x>0$ の領域にないので不適である．

$d \fallingdotseq 0$ のときは a_n はすべて異なるから x_n もすべて異なる．つまり ① は無限個の x_n に対して成り立つことになるので x_n に関する恒等式であり，$2d-1=0,\ bd=0$ が成り立つ．従って $d=\dfrac{1}{2}$ であり $\boldsymbol{b=0}$.

(2)　(1) より $\boldsymbol{d=\dfrac{1}{2}}$.

(3)　(1), (2) より $f(x)=x^2+2$ となる．この放物線の $x>0$ の部分に $A(p,\ p^2+2)$ $(p>0)$ をとる．A における法線の方程式は $y=-\dfrac{1}{2p}(x-p)+p^2+2=-\dfrac{x}{2p}+p^2+\dfrac{5}{2}$ であり，その y 切片は $p^2+\dfrac{5}{2}$ である．これは $a_n=p^2+2$ のとき $a_{n+1}=p^2+\dfrac{5}{2}=a_n+\dfrac{1}{2}$ となることを意味する．

従って A_1 を放物線の $x>0$ のどの部分にとっても，a_n は公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列になる．求める条件は $\boldsymbol{a>2}$.

IV　実数 t を媒介変数として $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$y=t\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ と表される曲線 C がある。以下の問に答えよ。

(1)　$x=0$ となる t の値と，$y=0$ となる t の値を求めよ。

(2)　t を変化させたときの x の値域を求めよ。

(3)　t を変化させたときに y が極値をとるときの x の値を求めよ。

(4)　xy 平面上における曲線 C の概形を図示し，曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めよ。なお，C の凹凸は調べなくてよい。

解答

(1)　$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=0$ より $t=\mathbf{1,\ -1}$．　また，$y=t\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=0$ より $t=\mathbf{-1,\ 0,\ 1}$．

(2)　$x=-1+\dfrac{2}{t^2+1}$ であり，$t^2+1\geqq 1$ より $0<\dfrac{2}{t^2+1}\leqq 2$ であるから，$-1<-1+\dfrac{2}{t^2+1}\leqq 1$，すなわち $\boldsymbol{-1<x\leqq 1}$ である．

(3)　$y=\dfrac{t-t^3}{1+t^2}$ を t で微分すると，

$$\frac{dy}{dt}=\frac{(-3t^2+1)(1+t^2)-(t-t^3)\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{-t^4-4t^2+1}{(1+t^2)^2}$$

であるから，$\dfrac{dy}{dt}=0$ を解くと $t^2=-2\pm\sqrt{5}$ であるが，$t^2\geqq 0$ に注意して $t^2=-2+\sqrt{5}\cdots$① である．これより $t=\pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}$ となるので，y の増減は以下のようになる．

t	$-\infty$	$\cdots$	$-\sqrt{-2+\sqrt{5}}$	$\cdots$	$\sqrt{-2+\sqrt{5}}$	$\cdots$	∞
$\dfrac{dy}{dt}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	∞	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$-\infty$

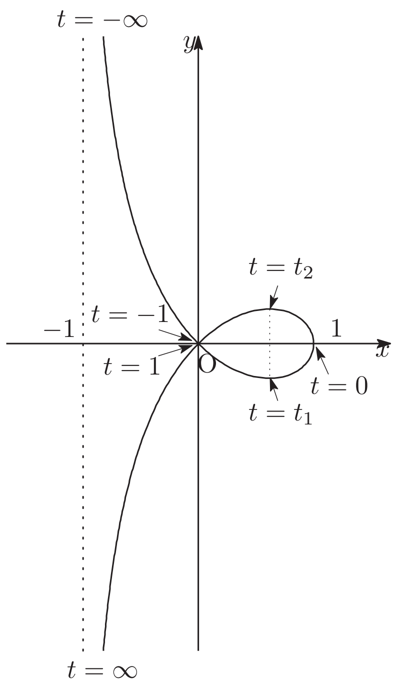
したがって，y が極値をとるときの t の値は $t=\pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}$ であることがわかるが，これは①のときにほかならない．よって，①を $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ に代入することにより，

求める x の値は $x=\dfrac{1-(-2+\sqrt{5})}{1+(-2+\sqrt{5})}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ である．

(4)　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$ により $\dfrac{dx}{dt}=0 \iff t=0$ である．$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=x(t)$，$y=t\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=y(t)$ とおき，$t_1=-\sqrt{-2+\sqrt{5}}$，$t_2=\sqrt{-2+\sqrt{5}}$ とおくと，曲線 C の x，y についての増減は以下のようになる．

t	$-\infty$	$\cdots$	t_1	$\cdots$	0	$\cdots$	t_2	$\cdots$	∞
$\dfrac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\dfrac{dy}{dt}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$(x,\ y)$	$(-1,\ \infty)$	$\searrow$	$(x(t_1),\ y(t_1))$	$\nearrow$	$(1,\ 0)$	$\nwarrow$	$(x(t_2),\ y(t_2))$	$\swarrow$	$(-1,\ -\infty)$

$x(-t)=x(t)$ および $y(-t)=-y(t)$ が成り立つことから曲線 C のグラフは x 軸対称であることにも注意すると，概形は次のようになる．



したがって，求める面積は曲線 C の $t=0$ (このとき $x=1$) から $t=1$ (このとき $x=0$) に対応する部分 ($y=y_1$ とする) と x 軸とで囲まれる部分の面積の 2 倍であるから，

$$
\begin{aligned}
2\int_0^1 y_1\,dx &= 2\int_1^0 \frac{t(1-t^2)}{(1+t^2)}\cdot\frac{dx}{dt}\,dt\\
&= 2\int_1^0 \frac{t(1-t^2)}{(1+t^2)}\cdot\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt\\
&= 8\int_0^1 \frac{t^2(1-t^2)}{(1+t^2)^3}\,dt\\
&\left(\text{ここで，} t=\tan\theta \text{とおくと，} dt=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\text{であり，} t:0\to 1 \text{のとき} \theta:0\to\frac{\pi}{4}\text{であるから}\right)\\
&= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2\theta(1-\tan^2\theta)}{(1+\tan^2\theta)^3}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta\\
&= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2\theta(1-\tan^2\theta)}{(1+\tan^2\theta)^2}\,d\theta\\
&= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\,d\theta \qquad (\text{分母・分子に} \cos^4\theta \text{をかけた})\\
&= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\cdot\cos 2\theta\,d\theta\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta-\cos^2 2\theta)\,d\theta\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos 2\theta-\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta\\
&= 4\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&= \boldsymbol{2-\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

講評

Ⅰ［不定方程式］（標準）典型的な問題であり，解法をしっかり学んでいれば難なく正解できたであろう．答が 2019 になるのはかなり作為的であり，実際の試験の場で「正解だ！」と確信を持てた受験生もいたのではないか．

Ⅱ［平面ベクトルの内積計算・三角関数］（標準）成分が三角関数で表された 2 つのベクトルについて，垂直条件や大きさを調べさせる．計算のみの問題と言えるが，分量としてはやや重め．(3) では，(2) で得られた $2\vec{a}+\vec{b}$ の成分を使うと計算が大変になってしまう．成分で計算する前に内積の式を展開するとよい．

Ⅲ［数学Ⅱと数列の融合問題］（やや難）放物線の法線から定められる数列が等差数列になる条件を求めさせる問題．一見大変な問題に見えるが，落ち着いて計算すれば計算量もあまりない． (3) は自明なもの以上の条件があるわけではないのだが，問題文に惑わされると悩んでしまうだろう．むしろ条件がないことの論証を求めているのかも知れない．

Ⅳ［数学Ⅲの微積分・媒介変数表示された曲線］（やや難）媒介変数で表された曲線に関する問題．(1)(2) は取りこぼしてはいけない．(3) も正答したいレベルだが，t の複 2 次式を解く場面で多くの受験生は不安を覚えただろう．(4) はやや難．グラフの概形を正しく把握できたかどうか，置換積分を正しく実行できたかが問われた．完答者は多くなかっただろう．

まず出題の形式が大きく変わり，国公立 2 次，大阪医科大学などと同様，全問記述形式になった（過去の関西医科大学には 1 度もなかったことである）．小問集合も姿を消した．ただ，記述形式とはいえ論証力より計算力が試される内容であることは例年通りである．難易度は昨年と同様だが，問題量は大きく減少したため，より「正確さ」が試されるセットとなった．Ⅰ, ⅡとⅣ (3) までを正確に計算し，あとはⅢ, Ⅳ (4) でどれだけ上乗せできるかの勝負となるだろう．目標は 65%.