医学部進学予備校 メビオ 解答速報

# 福岡大学医学部　数学

2019年2月2日実施

［I］　次の $\boxed{\phantom{(1)}}$ をうめよ。答は解答用紙の該当欄に記入せよ。

(i)　11 桁の自然数 12345654321 に含まれる素因数で一番大きい数は $\boxed{(\,1\,)}$ である。また，その数を 2 進数で表すと $\boxed{(\,2\,)}$ である。

(ii)　$n$ 人の得点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の平均を $\overline{x}$，分散を $v$ とするとき，得点 $x_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ の偏差値 $t_i$ は $t_i = 50 + \dfrac{10(x_i - \overline{x})}{\sqrt{v}}$ によって計算される。$n=3$ として，3 人の得点が $x_1=0$，$x_2=80$，$x_3=m$（$m$ は 1 以上 100 以下の整数）のとき，0 点の人の偏差値 $t_1$ を $m$ で表すと $t_1 = \boxed{(\,3\,)}$ であり，その偏差値の最小値は $\boxed{(\,4\,)}$ である。

(iii)　数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = \dfrac{1}{3}$，$a_{n+1} = a_n - (8n+4)a_na_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ をみたすとする。このとき $\{a_n\}$ の一般項は $\boxed{(\,5\,)}$ である。また，初項から第 100 項までの総和 $S_{100}$ は $\boxed{(\,6\,)}$ である。

**解答**

(1) 37　(2) 100101　(3) $50 - \dfrac{10(m+80)}{\sqrt{2(m^2-80m+6400)}}$　(4) $50-10\sqrt{2}$　(5) $a_n = \dfrac{1}{4n^2-1}$

(6) $\dfrac{100}{201}$

**解説**

(i)　$1\times1=1$，$11\times11=121$，$111\times111=12321$，$1111\times1111=1234321$，
$11111\times11111=123454321$，$111111\times111111=12345654321$ であるから

$$12345654321 = 111111^2$$

さらに，$111111 = 111\times1001 = (3\times37)\times(7\times11\times13)$ なので，一番大きい素因数は **37**.
また，37 を 2 進数で表すと $\mathbf{100101_{(2)}}$.

(ii)　平均 $\overline{x}$，分散 $v$ はそれぞれ

$$\overline{x} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{m+80}{3}$$

$$v = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = \frac{0^2+80^2+m^2}{3} - \left(\frac{m+80}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}(m^2-80m+80^2)$$

であり，偏差値 $t_1$ は

$$t_1 = \mathbf{50} - \frac{\mathbf{10(m+80)}}{\sqrt{\mathbf{2(m^2-80m+6400)}}} \cdots ①$$

となる．ここで，$m+80>0$ より

$$\begin{aligned}\frac{m+80}{\sqrt{m^2-80m+6400}} &= \sqrt{\frac{m^2+160m+80^2}{m^2-80m+80^2}} \\ &= \sqrt{1+\frac{240m}{m^2-80m+80^2}} \\ &= \sqrt{1+\frac{240}{m-80+\dfrac{80^2}{m}}} \cdots ②\end{aligned}$$

であり，$m>0$ より相加平均・相乗平均の関係

$$m+\frac{80^2}{m} \geqq 2\sqrt{m\cdot\frac{80^2}{m}} = 160 \quad \left(\text{等号成立は } m=\frac{80^2}{m} \iff m=80 \text{ のとき}\right)$$

を用いると，②は $m=80$ のとき最大となることがわかる．よって①より $m=80$ のとき $t_1$ は最小値 $\mathbf{50-10\sqrt{2}}$ をとる．

(iii)　与漸化式において $a_{n+1}=0$ と仮定すると $a_n=0$ となり帰納的に $a_1=0$ となってしまう．これは $a_1=\frac{1}{3}$ と矛盾するので，$a_na_{n+1} \fallingdotseq 0$ である．与漸化式の両辺を $a_na_{n+1}$ で割って

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} - (8n+4)$$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと

$$b_n = b_{n+1} - (8n+4)$$

$$b_{n+1} - b_n = 8n+4,\quad b_1 = 3$$

数列 $\{b_n\}$ の階差数列がわかったので，

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(8k+4) \quad (n \geqq 2) \\ &= 3 + 8\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + 4(n-1) \\ &= 4n^2-1 \quad (n=1 \text{ のときも成り立つ}) \end{aligned}$$

よって $a_n = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4n^2-1}}$ である．

$a_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$ と変形できるので

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} a_k$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{197} - \frac{1}{199}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{199} - \frac{1}{201}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{201}\right) \\
&= \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{201}}
\end{aligned}
$$

［II］ 次の $\boxed{\phantom{(1)}}$ をうめよ。答は解答用紙の該当欄に記入せよ。

(i) $f(x) = \sin 2x - 4\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ とする。$t = \cos x$ とおくとき $f(x)$ を $t$ の式で表すと $\boxed{(\ 1\ )}$ である。また，$f(x)$ の最小値は $\boxed{(\ 2\ )}$ である。

(ii) 楕円 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線を $\ell$ とする。このとき $\ell$ に垂直な $C$ の接線の方程式は $\boxed{(\ 3\ )}$ である。また，$\ell$ に垂直な $C$ の接線と $\ell$ および $\ell$ に平行な $C$ の接線で囲まれる長方形の面積は $\boxed{(\ 4\ )}$ である。

解答

(1) $2\sqrt{1-t^2}(t-2)$ (2) $\dfrac{-\sqrt[4]{3}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}$ (3) $2x - \sqrt{3}y = \pm\sqrt{19}$ (4) $\dfrac{16\sqrt{19}}{7}$

解説

(i)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin 2x - 4\sin x \\
&= 2\sin x\cos x - 4\sin x \\
&= 2\sin x(\cos x - 2)
\end{aligned}
$$

$t = \cos x$ とおくと $0 \leqq x \leqq \pi$ において $\sin x \geqq 0$ なので，$\sin x = \sqrt{1-t^2}$.
よって $\boldsymbol{f(x) = 2\sqrt{1-t^2}(t-2)}$.
$-1 \leqq t \leqq 1$ に注意すると $f(x) = -\sqrt{4(1-t^2)(t-2)^2}$ と変形できる.
$g(t) = 4(1-t^2)(t-2)^2$ とおく.

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= -8t(t-2)^2 + 8(t-2)(1-t^2) \\
&= 8(t-2)(-2t^2+2t+1)
\end{aligned}
$$

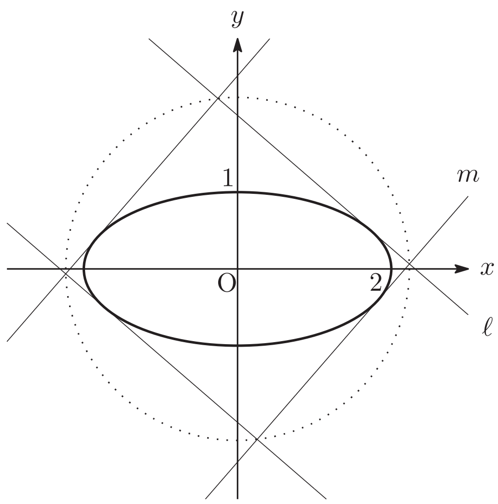
$-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で $g'(t) = 0$ を解くと $t = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ であるので，
$g(t)$ の増減表は次のようになる.

| $t$ | $-1$ | | $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $0$ |

よって $g(t)$ は $t = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(3+\sqrt{3})^2$ をとる.

従って，$f(x)$ の最小値は $-\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(3+\sqrt{3}) = \boldsymbol{\dfrac{-\sqrt[4]{3}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}}$ である.

(ii) $C$ は下図のような楕円である.




$\ell$ の方程式は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}x+\dfrac{1}{2}y=1$, つまり $\sqrt{3}x+2y=4$ である．従って $\ell$ に垂直な直線の方程式は $2x-\sqrt{3}y=k$ と置くことができる．これが楕円 $C$ の接線になるように $k$ を決めればよい．

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+\dfrac{k}{2}$ と変形して $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ に代入すると $19y^2+2\sqrt{3}ky+k^2-16=0$ を得る．この $y$ の 2 次方程式が重解を持てばよいので，判別式を $D$ として

$$\frac{D}{4}=3k^2-19(k^2-16)=-16(k^2-19)=0$$

を得る．従って $k=\pm\sqrt{19}$ であり，求める接線の方程式は $\boldsymbol{2x-\sqrt{3}y=\pm\sqrt{19}}$ である．

直線 $m$ を $m:2x-\sqrt{3}y=\sqrt{19}$ とおく．考えている長方形は明らかに原点を中心に持つ．点と直線の距離の公式より，原点と $\ell$ の距離 $d_\ell$ は $d_\ell=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ ，原点と $m$ の距離 $d_m$ は $d_m=\dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{7}}$ である．

従って長方形の面積 $S$ は $S=2d_\ell\times 2d_m=\boldsymbol{\dfrac{16\sqrt{19}}{7}}$.

# ［III］ （記述問題）

$k$ を整数とする。関数 $f(x)=xe^{-x}+e^{2x-k}$ について以下の問いに答えよ。ただし，$e$ は自然対数の底とする。

(i) $y=f(x)$ が極値をもたないような $k$ の最大値を求めよ。

(ii) $k$ が (i) の条件をみたす最大値のとき，$y=f(x)$ のグラフと $x=0,\ x=1$ と $x$ 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(i)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1-x)e^{-x}+2e^{2x-k} \\ &= 2e^{-x-k}\left\{-\frac{1}{2}e^k(x-1)+e^{3x}\right\} \end{aligned}$$

となる．$e^{-x-k}>0$ に注意すると，$y=f(x)$ が極値をもたないためには，$f'(x)$ の符号すなわち $-\dfrac{1}{2}e^k(x-1)+e^{3x}$ の符号が変化しなければよい．ゆえに，2 つのグラフ

$$y=\frac{1}{2}e^k(x-1)\cdots①,\quad y=e^{3x}\ (=g(x)\text{ とおく})$$

の上下関係が入れ替わらなければよい．①は定点 $(1,\ 0)$ を通り傾きが $\dfrac{1}{2}e^k\ (>0)$ の直線であり，$y=g(x)$ は下に凸な曲線である．これらが接するときの条件を考える．

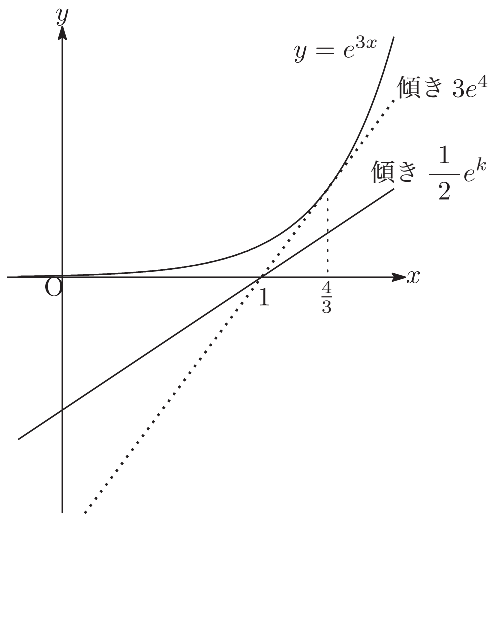
点 $(t,\ g(t))$ における $y=g(x)$ の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 3e^{3t}(x-t)+e^{3t} \\ &= 3e^{3t}x+(-3t+1)e^{3t} \end{aligned}$$

である．これに $(x,\ y)=(1,\ 0)$ を代入して整理すると

$$e^{3t}(-3t+4)=0 \iff t=\frac{4}{3}$$

を得る．このときの接線の傾き $g'\left(\dfrac{4}{3}\right)=3e^4$ と①の傾きを比較する．$y=g(x)$ のグラフから，




$$3e^4 \geqq \frac{1}{2}e^k \quad \text{すなわち} \quad e^{k-4}\leqq 6$$

を満たす最大の $k$ を考えればよい．

$2.7<e<3,\ e^2>7$ なので，答は　$\boldsymbol{k=5}$**.**

(ii) $k=5$ なので $f(x)=xe^{-x}+e^{2x-5}$ であり，$0\leqq x\leqq 1$ のとき明らかに $f(x)>0$ であるから，求める面積を $S$ とすると，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \left(xe^{-x} + e^{2x-5}\right) dx \\
&= \left[-(x+1)e^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x-5}\right]_0^1 \\
&= \mathbf{1 - 2e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-3} - \frac{1}{2}e^{-5}}
\end{aligned}
$$

講評

［I］［小問集合］（やや難）

(i) 整数問題．$12345654321 = 111111^2$ の変形ができないと苦しい．

(ii) データの分析．標準的．最小値の計算をしっかり合わせたい．

(iii) 漸化式．一手目の変形が出来るかがポイント．

［II］［小問集合］（標準）

(i) 三角関数と微積分の融合問題．計算するだけだが，やや重い．

(ii) 楕円とその接線．標準的．

［III］［数Ⅲ微積分］（やや難）

(i) 極値を持たない条件を方程式の解としてしっかり議論できるかがポイント．解き方によって上手い下手が出そう．

(ii) 単純な面積計算．易しい．

昨年に比べ難化した．さらりと解ける問題が殆ど無い．拾えるところをしっかり拾っていくしかないだろう．

[I](ii)，[II](i)(ii) が比較的解きやすいため，ここでしっかり得点したい．[III](ii) が易しいため，[III](i) を突破できたかが得点を大きく左右しそう．

目標は 50% .