医学部進学予備校
メビオ

# 解答速報

# 藤田医科大学（後期） 数学

2019年3月3日実施

問題１　次の問いに答えよ．

(1)　1 から 2019 までの整数で，4 で割り切れる整数の個数は $\boxed{\text{アイウ}}$ 個，4 または 6 で割り切れる整数の個数は $\boxed{\text{エオカ}}$ 個，4 または 6 または 10 で割り切れる整数の個数は $\boxed{\text{キクケ}}$ 個である．

(2)　$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+2y=7$ のとき，$\dfrac{x}{1+2y}+\dfrac{2y}{1+x}$ の最大値は $\boxed{\text{コ}}$，最小値は $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である．

(3)　2 つの変量 $x,\ y$ の測定結果が下の表のようになった．このとき，$x$ の分散は $\boxed{\text{セソ}}$，$y$ の分散は $\boxed{\text{タチ}}$，$x$ と $y$ の共分散は $\boxed{\text{ツテ}}$ である．また，$x$ と $y$ の相関係数を分数で表すと $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である．

| $x$ | 24 | 6 | 12 | 18 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 18 | 6 | 0 | 12 |

(4)　さいころを 4 回投げ，出た目を順に $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ とする．このとき，座標平面上で 2 直線 $a_1x+a_2y+1=0,\ a_3x+a_4y-1=0$ が平行になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネノハ}}}$ である．

(5)　$\overrightarrow{a}=(3,\ 11,\ 20),\ \overrightarrow{b}=(8,\ -3,\ -4)$ と実数 $t$ に対し，$|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$ の最小値は $\boxed{\text{ヒフ}}$ である．

(6)　1 辺の長さが 6 の正八面体のすべての面に接する球の体積は $\boxed{\text{ヘ}}\sqrt{\boxed{\text{ホ}}}\pi$ である．

(7)　$\cos 20^\circ \cos 140^\circ \cos 260^\circ = \dfrac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}$ である．

(8)　次の数列の第 2019 項は $\boxed{\text{ムメモラ}}$ である．

$$1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\cdots$$

ただし，この数列を，下のように区画に分けたとき，第 $n$ 番目の区画の最後の数と第 $n+1$ 番目の区画の最初の数は等しい．

$$1\ |\ 1,\ 2\ |\ 2,\ 3,\ 4\ |\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\ |\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\ |\ \cdots$$

(9)　$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{4\theta\sin\theta}=\frac{\boxed{\text{リ}}}{\boxed{\text{ル}}}$ である．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ である．

(10)　$x>1$ のとき，関数 $f(x)$ は等式 $\displaystyle\int_4^{x^3+3} f(t)dt=\log x$ を満たす．このとき，$f(6)=\dfrac{\boxed{\text{レ}}}{\boxed{\text{ロ}}}$ である．

解答

(1)　アイウ 504　エオカ 672　キクケ 739

(2)　コ 7　サシ 14　ス 9

(3)　セソ 45　タチ　45　ツテ 36　ト 4　ナ 5

(4)　ニヌ 43　ネノハ 648

(5)　ヒフ 21

(6)　ヘ 8　ホ 6

(7)　マ 1　ミ 8

(8)　ムメモラ 1956

(9)　リ 1　ル 8

(10)　レ 1　ロ 9

解説

(1)　1 から 2019 までの整数のうち，$k$ で割り切れるものの集合を $A_k$，その要素の個数を $n(A_k)$ で表すものとする．また $x$ を超えない最大の整数を $[x]$ と表すものとする．

4 で割り切れる整数の個数は

$$n(A_4) = \left[\frac{2019}{4}\right] = \mathbf{504}$$

4 または 6 で割り切れる整数の個数は

$$\begin{aligned}
&n(A_4 \cup A_6) \\
&= n(A_4) + n(A_6) - n(A_4 \cap A_6) \\
&= n(A_4) + n(A_6) - n(A_{12}) \\
&= \left[\frac{2019}{4}\right] + \left[\frac{2019}{6}\right] - \left[\frac{2019}{12}\right] \\
&= 504 + 336 - 168 \\
&= \mathbf{672}
\end{aligned}$$

4 または 6 または 10 で割り切れる整数の個数は

$$\begin{aligned}
&n(A_4 \cup A_6 \cup A_{10}) \\
&= n(A_4) + n(A_6) + n(A_{10}) - n(A_4 \cap A_6) - n(A_4 \cap A_{10}) - n(A_6 \cap A_{10}) + n(A_4 \cap A_6 \cap A_{10}) \\
&= n(A_4) + n(A_6) + n(A_{10}) - n(A_{12}) - n(A_{20}) - n(A_{30}) + n(A_{60}) \\
&= \left[\frac{2019}{4}\right] + \left[\frac{2019}{6}\right] + \left[\frac{2019}{10}\right] - \left[\frac{2019}{12}\right] - \left[\frac{2019}{20}\right] - \left[\frac{2019}{30}\right] + \left[\frac{2019}{60}\right] \\
&= 504 + 336 + 201 - 168 - 100 - 67 + 33 \\
&= \mathbf{739}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1+2y} + \frac{2y}{1+x} &= \frac{x(1+x) + 2y(1+2y)}{(1+2y)(1+x)} \\
&= \frac{(x+2y)^2 + (x+2y) - 4xy}{2xy + (x+2y) + 1} \\
&= \frac{28 - 2xy}{4 + xy} \\
&= \frac{36}{4+xy} - 2 \quad \cdots ①
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} xy &= (7-2y)y \\ &= -2y^2+7y \\ &= -2\left(y-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{49}{8} \end{aligned}$$

$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+2y=7$ より $0 \leqq y \leqq \dfrac{7}{2}$ なので，$0 \leqq xy \leqq \dfrac{49}{8}$

これより ① 式の範囲は

$$\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{9}} \leqq \frac{36}{4+xy}-2 \leqq \mathbf{7}$$

(3)　変量 $x,\ y$ の平均値を $\overline{x},\ \overline{y}$，分散を ${s_x}^2,\ {s_y}^2$，共分散を $s_{xy}$，相関係数を $r$ とする．

| $x$ | $y$ | $x-\overline{x}$ | $y-\overline{y}$ | $(x-\overline{x})^2$ | $(y-\overline{y})^2$ | $(x-\overline{x})(y-\overline{y})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 18 | 9 | 9 | 81 | 81 | 81 |
| 6 | 6 | $-9$ | $-3$ | 81 | 9 | 27 |
| 12 | 0 | $-3$ | $-9$ | 9 | 81 | 27 |
| 18 | 12 | 3 | 3 | 9 | 9 | 9 |
| $\overline{x}=15$ | $\overline{y}=9$ | | | ${s_x}^2=45$ | ${s_y}^2=45$ | $s_{xy}=36$ |

表より，$x$ の分散は **45**，$y$ の分散は **45**，$x$ と $y$ の共分散は **36** となる．

また相関係数は

$$r=\frac{s_{xy}}{\sqrt{{s_x}^2}\sqrt{{s_y}^2}}=\frac{36}{\sqrt{45}\sqrt{45}}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$$

(4)　2 直線が平行になるための必要十分条件は $a_1:a_2=a_3:a_4$ であるから，$a_1a_4=a_2a_3$ となる確率を求めればよい．ここで，$a_1$ と $a_4$ の積の値は次の表のようになる．

| $a_1 \backslash a_4$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

従って，

| 積 $a_1a_4$ の値 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1a_4=a_2a_3$ となる $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ の組の数 | $1^2$ | $2^2$ | $2^2$ | $3^2$ | $2^2$ | $4^2$ |

| 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 16 | 18 | 20 | 24 | 25 | 30 | 36 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^2$ | $1^2$ | $2^2$ | $4^2$ | $2^2$ | $1^2$ | $2^2$ | $2^2$ | $2^2$ | $1^2$ | $2^2$ | $1^2$ | 86 |

となるので，求める確率は $\dfrac{86}{6^4}=\dfrac{\mathbf{43}}{\mathbf{648}}$ である．

(5)

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}| &= |(8t+3,\ -3t+11,\ -4t+20)| \\
&= \sqrt{(8t+3)^2+(-3t+11)^2+(-4t+20)^2} \\
&= \sqrt{89t^2-178t+530} \\
&= \sqrt{89(t-1)^2+441}
\end{aligned}
$$

であるから，$t=1$ のとき最小値 $\sqrt{441}=\mathbf{21}$ をとる．

別解

実数 $t$ を動かすと $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ の終点は $(3,\ 11,\ 20)$ を通り方向ベクトルが $\overrightarrow{b}$ の直線上を動く．従って，$|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$ が最小となるのは $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ が方向ベクトルと垂直になるとき，すなわち

$$
\begin{aligned}
(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=0 &\iff (8t+3,\ -3t+11,\ -4t+20)\cdot(8,\ -3,\ -4)=0 \\
&\iff 8(8t+3)-3(-3t+11)-4(-4t+20)=0 \\
&\iff t=1
\end{aligned}
$$

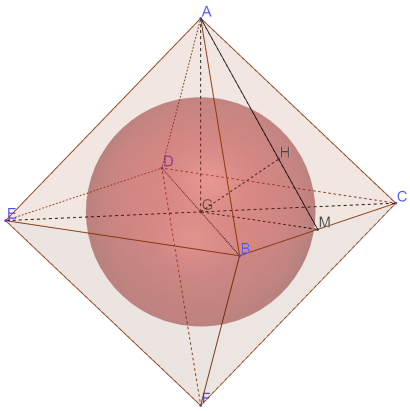
のときである．このとき $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(11,\ 8,\ 16)$ となるので，求める最小値は $\sqrt{11^2+8^2+16^2}=\mathbf{21}$ である．

(6) 右図において，M は辺 BC の中点，H は中心 G から面 ABC に下ろした垂線の足としていて，このとき内接球の半径は GH の長さである．ここで，

$\mathrm{GM}=3,\ \mathrm{AM}=3\sqrt{3},\ \mathrm{AG}=3\sqrt{2}$ であり，

三角形 AGM の面積について

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{GM}\cdot\mathrm{AG}=\frac{1}{2}\mathrm{AM}\cdot\mathrm{GH} \\
\iff\ &\frac{9\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{GH} \\
\iff\ &\mathrm{GH}=\sqrt{6}
\end{aligned}
$$




であることがわかるから，求める球の体積は

$\dfrac{4}{3}\pi(\sqrt{6})^3=\mathbf{8\sqrt{6}\pi}$ である．

(7) いろいろな解法が考えられる．

解法 1

積和の公式を繰り返し使う．

$$
\begin{aligned}
&\cos 20^\circ\cos 140^\circ\cos 260^\circ \\
&=\cos 20^\circ\times\frac{1}{2}\{\cos(260^\circ+140^\circ)+\cos(260^\circ-140^\circ)\} \\
&=\frac{1}{2}\cos 20^\circ\{\cos 400^\circ+\cos 120^\circ\} \\
&=\frac{1}{2}\cos 20^\circ\cos 40^\circ-\frac{1}{4}\cos 20^\circ \\
&=\frac{1}{4}\{\cos(40^\circ+20^\circ)+\cos(40^\circ-20^\circ)\}-\frac{1}{4}\cos 20^\circ \\
&=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cos 20^\circ-\frac{1}{4}\cos 20^\circ \\
&=\mathbf{\frac{1}{8}}
\end{aligned}
$$

解法 2

加法定理で分解する．一般の角度 $\theta$ に対し次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&\cos\theta\cos(\theta+120^\circ)\cos(\theta+240^\circ)\\
&=\cos\theta\,(\cos\theta\cos120^\circ-\sin\theta\sin120^\circ)\,(\cos\theta\cos240^\circ-\sin\theta\sin240^\circ)\\
&=\cos\theta\left(-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\left(-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\\
&=\frac{1}{4}\cos\theta(\cos^2\theta-3\sin^2\theta)\\
&=\frac{1}{4}\cos\theta(4\cos^2\theta-3)\\
&=\frac{1}{4}(4\cos^3\theta-3\cos\theta)\\
&=\frac{1}{4}\cos3\theta
\end{aligned}
$$

これに $\theta=20^\circ$ を代入して $\cos20^\circ\cos140^\circ\cos260^\circ=\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$ を得る．

解法 3

3 倍角の公式 $\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ に $\theta=20^\circ,\ 140^\circ,\ 260^\circ$ を代入することにより

$$
\begin{aligned}
\cos60^\circ&=4\cos^3 20^\circ-3\cos20^\circ\\
\cos420^\circ&=4\cos^3 140^\circ-3\cos140^\circ\\
\cos780^\circ&=4\cos^3 260^\circ-3\cos260^\circ
\end{aligned}
$$

が得られるがこれら 3 式の左辺はいずれも $\dfrac{1}{2}$ である．$\cos20^\circ,\ \cos140^\circ,\ \cos260^\circ$ はすべて異なるので，$x=\cos20^\circ,\ \cos140^\circ,\ \cos260^\circ$ は $4x^3-3x-\dfrac{1}{2}=0$ の異なる 3 解ということになる．従って解と係数の関係より $\cos20^\circ\cos140^\circ\cos260^\circ=-\dfrac{-\frac{1}{2}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$.

(8) 通し番号で第 $m$ 項目の数を $a_m$ とする．まず 1, 2, 3, $\cdots$ という数列を考えたうえで，区画がひとつ進むたびに $a_m$ は 1 ずつ減っていくのだから，$a_m$ が第 $n$ 番目の区画に入っている場合，$a_m=m-(n-1)$ であることが分かる．

第 $n$ 番目の区画の末項は，通し番号で $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 項目であるから，$a_{2019}$ が第 $n$ 番目の区画に入るためには

$$\frac{(n-1)n}{2}<2019\leqq\frac{n(n+1)}{2}$$

の成り立つことが必要十分である．$\dfrac{n^2}{2}\fallingdotseq2000$ つまり $n\fallingdotseq\sqrt{4000}=20\sqrt{10}\fallingdotseq63.2$ と見当をつけて探すと，

$$\frac{62\cdot63}{2}=1953,\quad\frac{63\cdot64}{2}=2016,\quad\frac{64\cdot65}{2}=2080$$

より $n=64$ とわかる．従って

$$a_{2019}=2019-(64-1)=\mathbf{1956}$$

(9)

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{4\theta\sin\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{4\theta\sin\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}\\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{4\theta\sin\theta(1+\cos\theta)}\\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\\
&= \frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{8}}
\end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{4\theta\sin\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{4\theta\cdot 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}\\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\dfrac{\theta}{2}}\\
&= \frac{1}{8}\cdot 1\cdot 1\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{8}}
\end{aligned}$$

(10)　$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると，

$$\int_4^{x^3+3} f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_4^{x^3+3} = F(x^3+3)-F(4)$$

となる．従って，与式の両辺を $x$ で微分すると

$$f(x^3+3)(x^3+3)' = \frac{1}{x} \iff 3x^2 f(x^3+3) = \frac{1}{x} \iff f(x^3+3) = \frac{1}{3x^3}$$

となるので，$x=\sqrt[3]{3}\,(>1)$ を代入することにより $f(6)=\boldsymbol{\frac{1}{9}}$.

問題 2

$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ を正の実数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{a_1+a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1a_2}$ を証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

(2) (1) より，$\dfrac{a_1+a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1a_2}$，$\dfrac{a_3+a_4}{2} \geqq \sqrt{a_3a_4}$ となることを利用して，
$\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$ を証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

(3) (2) で，$a_4 = \dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$ とおくことにより，$\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$ を証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

(4) (2) と (3) の証明の考え方を利用して $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ を証明する方法の概略を，数行程度で述べよ．

解答

(1) $a_1+a_2-2\sqrt{a_1a_2} = (\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geqq 0$ より

$$a_1+a_2 \geqq 2\sqrt{a_1a_2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{a_1+a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1a_2}$$

が成立する．等号成立は，$\sqrt{a_1} = \sqrt{a_2}$ すなわち $a_1 = a_2$ のとき．　(証明終)

(2) 与えられた不等式を辺々加えて 2 で割ると，

$$\frac{\dfrac{a_1+a_2}{2}+\dfrac{a_3+a_4}{2}}{2} \geqq \frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2}$$

である．さらに $\sqrt{a_1a_2} > 0$，$\sqrt{a_3a_4} > 0$ なので (1) を利用すると，

$$\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2} \geqq \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}} = \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

である．従って，

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

が成り立つ．等号成立は，

$$a_1 = a_2 \text{ かつ } a_3 = a_4 \text{ かつ } \sqrt{a_1a_2} = \sqrt{a_3a_4}$$

のとき，すなわち $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ のとき．　(証明終)

(3) $a_4$ に代入すると，

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}}{4} \geqq \sqrt[4]{a_1a_2a_3\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)}$$

$$\iff \quad \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqq \sqrt[4]{a_1a_2a_3}\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\iff \quad \left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \geqq \sqrt[4]{a_1a_2a_3}$$

両辺を $\dfrac{4}{3}$ 乗すると，

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$$

が得られる．等号成立は，

$$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$$

のとき，すなわち $a_1 = a_2 = a_3$ のとき．　（証明終）

(4)　(2) のことを同様に繰り返すことにより，$n = 2^k$ のとき成り立つことが示される．

$n \neq 2^k$ のときは，$2^{k-1} < n < 2^k$ となる $k$ に対して，$a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{2^k} = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ を

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} \geqq \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}} \cdots ①$$

に代入すると，

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_n} \left( \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^{\frac{2^k - n}{2^k}}$$

となり，この両辺に $\left( \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^{-\frac{2^k - n}{2^k}}$ をかけて，両辺を $\dfrac{2^k}{n}$ 乗すれば

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \cdots ②$$

が示される．

別解

ある整数 $l\,(\geqq 2)$ について

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_l}{l} \geqq \sqrt[l]{a_1 a_2 \cdots a_l}$$

が成り立つと仮定すると，この式に $a_l = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{l-1}}{l-1}$ を代入して (3) と同様の過程をたどることにより

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{l-1}}{l-1} \geqq \sqrt[l-1]{a_1 a_2 \cdots a_{l-1}}$$

が成り立つと分かる．これを用いると，先の証明において ① の成立を根拠として帰納的に ② の成立が示される．

## 問題 3

座標空間に 4 点 O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1) を頂点とする四面体 OABC がある．この四面体の内部に動点 P($t$, $t$, $t$) があるとき，次の問いに答えよ．

(1) $t$ のとりうる値の範囲を求めよ．
(2) △OAP の面積を $t$ を用いて表せ．
(3) △ABP の面積を $t$ を用いて表せ．
(4) △OAP と △ABP の面積の和 $S$ が最小となるときの $t$ の値を求めよ．

解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (t,\ t,\ t) = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，

$$\text{P が四面体 OABC の内部にある} \iff (t > 0 \text{ かつ } t + t + t < 1) \iff \boldsymbol{0 < t < \frac{1}{3}}$$

(2)

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OAP} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1\cdot 3t^2 - t^2} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (t-1,\ t,\ t)$ より

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABP} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot(3t^2 - 2t + 1) - 1} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{6t^2 - 4t + 1}}\end{aligned}$$

(4) $S = \dfrac{\sqrt{2}}{2}t + \dfrac{1}{2}\sqrt{6t^2 - 4t + 1}$ であるから，

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3t - 1}{\sqrt{6t^2 - 4t + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{12t^2 - 8t + 2} + 6t - 2}{2\sqrt{6t^2 - 4t + 1}} \\ &= 0\end{aligned}$$

より

$$\sqrt{12t^2 - 8t + 2} = -6t + 2$$

となる．$0 < t < \dfrac{1}{3}$ の条件下でこの両辺は正なので，2 乗して整理すると

$$12t^2 - 8t + 1 = 0 \iff (6t - 1)(2t - 1) = 0 \iff t = \frac{1}{6},\ \frac{1}{2}$$

となる．$0 < t < \dfrac{1}{3}$ なので $t = \dfrac{1}{6}$．さらに $\dfrac{dS}{dt} > 0$ を解くと $\dfrac{1}{6} < t < \dfrac{1}{3}$ も得られるので $S$ の増減は以下の通り．

| $t$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{1}{6}$ | $\cdots$ | $\left(\frac{1}{3}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dS}{dt}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $S$ | | $\searrow$ | 最小 | $\nearrow$ | |

従って，$S$ が最小となるのは $\boldsymbol{t = \frac{1}{6}}$ のとき.

## 講評

### 問題 1［小問集合］（標準）

例年通りマーク形式の 10 問．典型的ではあるが，計算が面倒なものやちょっとしたテクニックが必要なものが含まれ，2019 前期に比べるとやや難化した．

### 問題 2［証明］（標準〜やや難）

相加相乗平均について，2 正数から始まり最後は $n$ 個の正数について証明する問題．典型題ではあるが，(3)(4) は解いた経験がないと手が付きにくいだろう．

### 問題 3［空間座標，関数の増減］（標準）

(2)(3) は，空間内で与えられた 3 点を頂点とする三角形の面積の求め方が身についていれば問題ないはず．(4) は計算が少々煩雑ではあるが，何とか完答したい．

## 総評

出題形式はここ何年かと同様．難易度については，昨年度までの出題に比べると問題 2，3 の序盤が取り組みやすくなっている（これは 2019 前期と同様）が，問題 1 がやや得点しにくいと思われる．　目標点は 70%．

医学部進学予備校 メビオ
〒540-0033 大阪市中央区石町2-3-12 ベルヴォア天満橋
0120-146-156
https://www.mebio.co.jp/
MeBio Scholastics