医学部進学予備校 メビオ 解答速報

藤田医科大学（前期） 数学

2019年1月29日実施

問題1　次の問いに答えよ．

(1)　x を 0 以上の整数とする．4 個の値からなるデータ 24, 49, 55, x の中央値は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りある．

(2)　2019! の末尾には $\boxed{\text{ウエオ}}$ 個の 0 が続いて並ぶ．

(3)　$x > 0$ のとき，$4x + \dfrac{1}{x}$ の最小値は $\boxed{\text{カ}}$，$16x^2 + \dfrac{1}{8x^4}$ の最小値は $\boxed{\text{キ}}$ である．

(4)　三角形 ABC の辺 AB, BC, CA 上に

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \mathrm{BQ} : \mathrm{QC} = \mathrm{CR} : \mathrm{RA} = 1 : 5$$

となるように点 P, Q, R をとる．AQ と BR の交点を S, BR と CP の交点を T, CP と AQ の交点を U とするとき，三角形 STU の面積は三角形 ABC の面積の $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ 倍である．

(5)　原点 O からさいころを投げて出た目に従って xy 平面上を進む．出た目が 1 のとき x 方向に $+1$，2 または 3 のとき x 方向に -1，4 のとき y 方向に $+1$，5 または 6 のとき y 方向に -1 進むとする．さいころを 2 回続けて投げた後で原点 O にいる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$，4 回続けて投げた後で原点 O にいる確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である．

(6)　実数 k に対して xy 平面上の 2 つの曲線 $y = x^3 - x^2 + 2x$ と $y = \dfrac{1}{2}x^2 - k$ が共有点を 1 つだけ持ち，この共有点でのそれぞれの曲線の接線が直交するとき，$k = \dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である．

(7)　$\sin\alpha + \sin\beta = \dfrac{3}{2}$，$\cos\alpha + \cos\beta = \dfrac{1}{4}$ のとき，$\cos(\alpha - \beta) = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ である．

(8)　原点を O とする平面上に △ABC がある．△ABC の 3 頂点 A，B，C に対し $10\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$ が成り立つとき，△OAB の面積は △ABC の面積の $\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$ 倍である．

(9)　$f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ のとき，$f'(\log 5) = \dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$ である．

(10)　複素数平面上を点 P(z) が

$$|60z - 2| = 1$$

を満たすように動く．原点 O(0) を始点とする半直線 OP 上に $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ} = 1$ となるように点 Q(w) をとるとき，点 Q は半径 $\boxed{\text{ヘホ}}$ の円を描く．

解答

(1)　アイ．32　　(2)　ウエオ．502　　(3)　カ．4　キ．6

(4)　クケコサ．$\dfrac{16}{31}$　　(5)　シス．$\dfrac{2}{9}$ セソ．$\dfrac{1}{9}$　　(6)　タチツテ．$\dfrac{47}{54}$

(7)　トナニ．$\dfrac{5}{32}$　　(8)　ヌネノ．$\dfrac{4}{19}$　　(9)　ハヒフ．$\dfrac{5}{36}$

(10)　ヘホ．20

解説

(1)　4 個のデータの中央値を m とする．

$0 \leqq x \leqq 24$ のとき，$m = \dfrac{24+49}{2} = 36.5$ の 1 通り．

$25 \leqq x \leqq 54$ のとき，$m = \dfrac{x+49}{2}$ であり，これは 37，37.5，$\cdots$，51.5 の 30 通り．

$55 \leqq x$ のとき，$m = \dfrac{49+55}{2} = 52$ の 1 通り．

以上から，$1+30+1 = \mathbf{32}$ 通り．

(2)　2019! が 10 で何回割り切れるかを調べればよい．$10 = 2 \cdot 5$ なので，2019! が 2 と 5 でそれぞれ何回割り切れるか調べると，

- 2 で割り切れる回数は，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2019}{2^n}\right] = 1009+504+252+126+63+31+15+7+3+1 = 2011 \text{ 回}$$

- 5 で割り切れる回数は，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2019}{5^n}\right] = 403+80+16+3 = 502 \text{ 回}$$

以上から，2019! は 10 で 502 回割り切れるので，答は **502**.

(3)　$x > 0$ なので，2 正数の相加相乗平均の関係から

$$4x + \frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{4x \cdot \frac{1}{x}} = 4$$

が成り立つ．等号は $4x = \dfrac{1}{x}$ すなわち $x = \dfrac{1}{2}$ のとき成り立つので，このとき　$4x + \dfrac{1}{x}$　は最小値　**4**　をとる．

　また 3 正数の相加相乗平均の関係を利用すると，

$$\begin{aligned}16x^2 + \frac{1}{8x^4} &= 8x^2 + 8x^2 + \frac{1}{8x^4}\\ &\geqq 3 \cdot \sqrt[3]{8x^2 \cdot 8x^2 \cdot \frac{1}{8x^4}}\\ &= 6\end{aligned}$$

が成り立つ．上式の不等号部分の等号は $8x^2 = \dfrac{1}{8x^4}$ すなわち $x = \dfrac{1}{2}$ のとき成り立つので，このとき $16x^2 + \dfrac{1}{8x^4}$　は最小値　**6**　をとる．（後半は，$x^2 = t$ とおいて関数 $16t + \dfrac{1}{8t^2}$ を t で微分してその増減を調べてもよい）

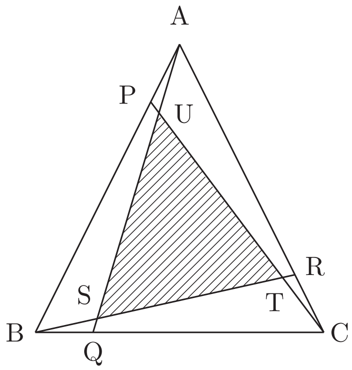
(4)　$\triangle$ABQ と直線 PUC に関するメネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} \cdot \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CQ}} \cdot \frac{\mathrm{QU}}{\mathrm{UA}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{\mathrm{QU}}{\mathrm{UA}} = 1$$

これより $\mathrm{AU}:\mathrm{UQ}=6:25$ がわかる．また $\triangle\mathrm{AQC}$ と直線 BSR に関するメネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SQ}}\cdot\frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RA}}=\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SQ}}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=1$$

これより $\mathrm{AS}:\mathrm{SQ}=30:1$ がわかる．両方を合わせると $\mathrm{AU}:\mathrm{US}:\mathrm{SQ}=6:24:1$ が得られる．全く同様に $\mathrm{BS}:\mathrm{ST}:\mathrm{TR}=\mathrm{CT}:\mathrm{TU}:\mathrm{UP}=6:24:1$ もわかる．



$\triangle\mathrm{ABC}=S$ とすると三角形を縮小していくことにより

$$\begin{aligned}
&\triangle\mathrm{AQC}=S\times\frac{5}{6},\\
&\triangle\mathrm{UQC}=S\times\frac{5}{6}\times\frac{25}{31},\\
&\triangle\mathrm{UST}=S\times\frac{5}{6}\times\frac{25}{31}\times\frac{24}{25}\times\frac{24}{30}=\frac{16}{31}S
\end{aligned}$$

となっていることが分かるので，答は $\boldsymbol{\dfrac{16}{31}}$ である．

(5) 出た目が 1 になる事象を A，2 または 3 になる事象を B，4 になる事象を C，5 または 6 になる事象を D とする．
さいころを 2 回続けて投げた後で原点 O にいるためには，

(i) A と B が 1 回ずつ
(ii) C と D が 1 回ずつ

のいずれかが起こらなければならない．

(i)(ii) それぞれの場合において，確率は ${}_2\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{9}$．

ゆえに求める確率は，$\dfrac{1}{9}\times 2=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$．

さいころを 4 回続けて投げた後で原点 O にいるためには，

(i) A と B が 2 回ずつ
(ii) C と D が 2 回ずつ
(iii) A，B，C，D が 1 回ずつ

のいずれかが起こらなければならない．

(i)(ii) それぞれの場合において，確率は ${}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{54}$．

(iii) の確率は $4!\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{2}{27}$．

ゆえに求める確率は，$\dfrac{1}{54}\times 2+\dfrac{2}{27}=\boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$．

(6) $f(x)=x^3-x^2+2x$，$g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-k$ とすると，

$f'(x)=3x^2-2x+2$，$g'(x)=x$ である．

共有点での x 座標を t とすると，

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)\cdot g'(t)=-1 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} t^3-t^2+2t=\dfrac{1}{2}t^2-k \\ \left(3t^2-2t+2\right)t=-1 \end{cases}$$

が成り立つことが必要である．これらを解いて，$t=-\dfrac{1}{3}$，$k=\dfrac{47}{54}$ を得る．

このとき，

$$\begin{aligned} h(x)&=f(x)-g(x) \\ &=x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+\frac{47}{54} \end{aligned}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} h'(x)&=3x^2-3x+2 \\ &=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}>0 \end{aligned}$$

となる．従って $h(x)$ は単調増加であるから方程式 $h(x)=0$ は実数解を 1 つだけもつので，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は確かに共有点を 1 つだけもつ（実は任意の k の値に対して共有点は 1 つだけである）．以上から，$k=\boldsymbol{\dfrac{47}{54}}$．

(7)　2 式の両辺をそれぞれ 2 乗すると，

$$\begin{aligned} &\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{9}{4}\cdots① \\ &\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{16}\cdots② \end{aligned}$$

となるので，①＋② より

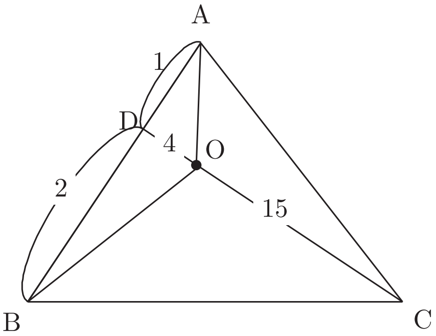
$$2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\frac{37}{16} \iff \cos(\alpha-\beta)=\boldsymbol{\frac{5}{32}}$$

である．

(8)

$$\begin{aligned} 10\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0} &\iff \overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{10\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4} \\ &\iff \overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{15}{4}\cdot\frac{10\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{15} \\ &\iff \overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{15}{4}\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3} \end{aligned}$$

であるから，点 C は線分 AB を 1 : 2 に内分する点を D としたとき線分 OD を 15 : 19 に外分する点である．



したがって，辺 AB を共通の底辺とみると， △OAB の高さは △ABC の高さの $\dfrac{4}{19}$ 倍であるから， △OAB の面積は △ABC の面積の $\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{19}}$ 倍である．

(9)　$f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ であるから，$f'(\log 5) = \dfrac{5}{(5+1)^2} = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}}$.

(10)　$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$ から　$|z||w| = 1 \cdots ①$　であり，また Q が半直線 OP 上にあるという条件から　$w = kz \cdots ②$ (k は正の実数)　とおける．①から z, w はいずれも 0 ではないことが分かる．①, ②から w を消去すると，

$$|z||kz| = 1 \iff k|z|^2 = 1 \iff k = \frac{1}{z\overline{z}}$$

となるので，これを②に代入することにより　$w = \dfrac{1}{\overline{z}} \iff \overline{z} = \dfrac{1}{w}$　が分かる．$|60z-2| = 1$ より $|60\overline{z}-2| = 1$　も成り立つので，これに　$\overline{z} = \dfrac{1}{w}$　を代入することにより，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{60}{w} - 2\right| = 1 &\iff |60-2w| = |w| \\
&\iff 2|w-30| = |w| \\
&\iff 4(w-30)(\overline{w}-30) = w\overline{w} \quad (\text{両辺を 2 乗した}) \\
&\iff 4\{w\overline{w} - 30(w+\overline{w}) + 900\} = w\overline{w} \\
&\iff w\overline{w} - 40(w+\overline{w}) + 1200 = 0 \\
&\iff (w-40)(\overline{w}-40) = 400 \\
&\iff |w-40| = 20
\end{aligned}$$

従って，点 Q(w) は中心が点 40 で半径が **20** の円を描く．

別解

$|60z-2| = 1 \iff \left|z - \dfrac{1}{30}\right| = \dfrac{1}{60}$ であるから，点 P は点 $\dfrac{1}{30}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{60}$ の円を描く．この円を E としよう．円 E と実軸の 2 交点 $\dfrac{1}{60}$, $\dfrac{1}{20}$ をそれぞれ A, C とし，実軸上に $\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=1$, $\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OD}=1$ となる点 B, D をとると， B(60), D(20) である．ここで，半直線 OP と円 E との P 以外の交点を R とし (P が円 E の接点の場合は P = R とする)，半直線 OP 上に $\mathrm{OR}\cdot\mathrm{OS}=1$ となる点 S をとる (P = R の場合, S = Q である)．すると，次の 4 つの式が成り立っていることになる．

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ} &= 1 \\
\mathrm{OR}\cdot\mathrm{OS} &= 1 \\
\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB} &= 1 \\
\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OD} &= 1
\end{aligned}\right\} \cdots ①$$

一方で，円 E についての方べきの定理より

$$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OR} = \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OC} \cdots ②$$

が成り立っているから，①, ② より

$$\mathrm{OQ} \cdot \mathrm{OS} = \mathrm{OB} \cdot \mathrm{OD}$$

が成り立っていることになる．方べきの定理によりこれは 4 点 B，D，Q，S が同一円周上にあることを示している．この円を E' とすると，対称性によりこの円は BD を直径とする円であり，これは P，R の位置によらない．したがって，求める円の半径は **20** である．

問題 2

実数 t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で動くとき，xy 平面において

$$x(x-2t)+y\{y-2(1-t)\}=0$$

で与えられる曲線が通過しうる部分を D とする．次の問いに答えよ．

(1) D を図示せよ．

(2) D の面積 S を求めよ．

(3) D のうち $y \geqq 0$ の部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$

(1) 与式を t に関してまとめると，

$$(-2x+2y)t+x^2+y^2-2y=0\cdots①$$

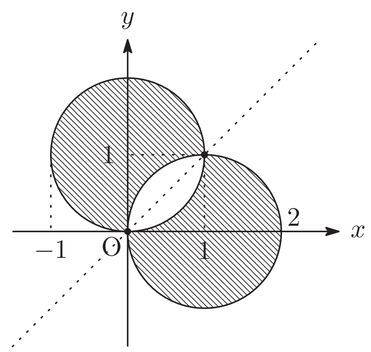
となる．この t の方程式が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で解をもつような条件を考えればよい．

(i) $-2x+2y=0$ すなわち $y=x$ のとき

①から $x^2+y^2-2y=0$. これに $y=x$ を代入して整理すると $2x(x-1)=0$ より $x=0,\ 1$. 従って $(x,\ y)=(0,\ 0),\ (1,\ 1)$ は，$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす任意の t に対して①上の点となる．

(ii) $-2x+2y \fallingdotseq 0$ すなわち $y \fallingdotseq x$ のとき

①から $t=\dfrac{x^2+y^2-2y}{2(x-y)}$ となる．$0 \leqq t \leqq 1$ より $0 \leqq \dfrac{x^2+y^2-2y}{2(x-y)} \leqq 1\cdots②$ となればよい．以下，$x-y$ の正負で場合分けする．



- $x-y>0$ つまり $y<x$ のとき

$$② \iff 0 \leqq x^2+y^2-2y \leqq 2(x-y)$$
$$\iff x^2+(y-1)^2 \geqq 1 \quad \text{かつ} \quad (x-1)^2+y^2 \leqq 1$$

- $x-y<0$ つまり $y>x$ のとき

$$② \iff 0 \geqq x^2+y^2-2y \geqq 2(x-y)$$
$$\iff x^2+(y-1)^2 \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad (x-1)^2+y^2 \geqq 1$$

以上 (i)(ii) から，領域 D は右上図の斜線部となる．ただし，境界上の点を含む．

(2) 図の 2 つの領域の面積は等しく，そのうち一方の面積は，

$$1^2\pi-\left(1^2\pi\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)\times 2=\frac{1}{2}\pi+1$$

である．従って， $\boldsymbol{S=\pi+2}$.

(3) 円 $x^2+(y-1)^2=1$ のうち $y \geqq 1$ を満たす部分を $y=y_1$ とし，$y \leqq 1$ を満たす部分を $y=y_2$ とする．また，円 $(x-1)^2+y^2=1$ のうち $y \geqq 0$ を満たす部分を $y=y_3$ とすると，

$$V=\int_{-1}^{1}\pi {y_1}^2dx-\underbrace{\int_{-1}^{0}\pi {y_2}^2dx}_{③}-\underbrace{\int_{0}^{1}\pi {y_3}^2dx}_{④}+\underbrace{\int_{0}^{1}\pi {y_2}^2dx}_{⑤}+\underbrace{\int_{1}^{2}\pi {y_3}^2dx}_{⑥}$$

となる．図形的に考えると ③ = ⑤, ④ = ⑥ は明らかであるから，

$$V=\int_{-1}^{1}\pi {y_1}^2dx$$

となる．

$$x^2+(y-1)^2=1 \iff y=1\pm\sqrt{1-x^2} \quad \text{より} \quad y_1=1+\sqrt{1-x^2}$$

であるから，

$$V=\int_{-1}^{1}\pi\left(\underline{2-x^2}_{⑦}+2\underline{\sqrt{1-x^2}}_{⑧}\right)dx$$

(⑦は偶関数．また，⑧については円の面積を利用)

$$=\pi\left(2\left[2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+2\times1^2\pi\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{10}{3}\pi+\pi^2}$$

問題3

自然数 k, n に対して $S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k + n^k$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　すべての自然数 n に対して $S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ が成り立つことを証明せよ．

(2)　すべての自然数 n に対して $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ が成り立つことを証明せよ．

(3)　すべての自然数 n に対して $S_4(n) = S_2(n)\{aS_1(n) + b\}$ を満たす実数の定数 a, b が存在することを証明せよ．

解答

(1)　数学的帰納法で証明する．

(i)　$n = 1$ のときは両辺ともに 1 で成り立っている．

(ii)　$n = l$ (l はある自然数) に対して $S_1(l) = \dfrac{l(l+1)}{2}$ が成り立っていると仮定する．

$n = l + 1$ のとき

$$S_1(l+1) = S_1(l) + (l+1) = \frac{l(l+1)}{2} + (l+1) = \frac{(l+1)(l+2)}{2}$$

これは $S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ が $n = l + 1$ の場合にも成り立っていることを意味する．

以上数学的帰納法により命題は証明された．

(2)　数学的帰納法で証明する．

(i)　$n = 1$ のときは両辺ともに 1 で成り立っている．

(ii)　$n = l$ (l はある自然数) に対して $S_2(l) = \dfrac{l(l+1)(2l+1)}{6}$ が成り立っていると仮定する．

$n = l + 1$ のとき

$$\begin{aligned} S_2(l+1) &= S_2(l) + (l+1)^2 = \frac{l(l+1)(2l+1)}{6} + (l+1)^2 = \frac{l+1}{6}\{l(2l+1) + 6(l+1)\} \\ &= \frac{l+1}{6}(2l^2 + 7l + 6) = \frac{(l+1)(l+2)(2l+3)}{6} \end{aligned}$$

これは $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ が $n = l + 1$ の場合にも成り立っていることを意味する．

以上数学的帰納法により命題は証明された．

別解

自然数 n に対して $T_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ とおく．$S_2(1) = T_2(1) = 1$ である，階差を考える．n を 2 以上の自然数とすると $S_2(n) - S_2(n-1) = n^2$．また

$$\begin{aligned} T_2(n) - T_2(n-1) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n}{6}\{(n+1)(2n+1) - (n-1)(2n-1)\} \\ &= \frac{n}{6}\{(2n^2 + 3n + 1) - (n^2 - 3n + 11)\} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

従ってすべての自然数 n に対して $S_2(n) = T_2(n)$ が成り立つ．

(3)　$S_4(1) = S_2(1) = S_1(1) = 1$ なので，$S_4(n) = S_2(n)\{aS_1(n)+b\}$ に $n = 1$ を代入して $1 = a + b$ の成り立つことが必要，また $S_4(2) = 1^4 + 2^4 = 17$, $S_2(1) = 1^2 + 2^2 = 5$. $S_1(2) = 1 + 2 = 3$ なので $S_4(n) = S_2(n)\{aS_1(n)+b\}$

に $n=2$ を代入して $17=5(3a+b)$ の成り立つことも必要である．連立方程式を解くと $a=\dfrac{6}{5}, b=-\dfrac{1}{5}$ を得る．これがすべての自然数 n に対して $S_4(n)=S_2(n)\{aS_1(n)+b\}$ を成り立たせることを見ればよい，

$T_4(n)=S_2(n)\left\{\dfrac{6}{5}S_2(n)-\dfrac{1}{5}\right\}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left\{\dfrac{3}{5}n(n+1)-\dfrac{1}{5}\right\}$ とおく．$T_4(1)=1$ である．

$S_4(n)=T_4(n)$ を示したい．そのために階差を考えよう．n を 2 以上の自然数とする，

$$
\begin{aligned}
&T_4(n)-T_4(n-1)\\
&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left\{\frac{3}{5}n(n+1)-\frac{1}{5}\right\}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\left\{\frac{3}{5}(n-1)n-\frac{1}{5}\right\}\\
&=\frac{n^2}{10}\{(n+1)^2(2n+1)-(n-1)^2(2n-1)\}-\frac{n}{30}\{(n+1)(2n+1)-(n-1)(2n-1)\}\\
&=\frac{n^2}{10}\{(2n^3+5n^2+4n+1)-(2n^3-5n^2+4n-1)\}-\frac{n}{30}\{(2n^2+3n+1)-(2n^2-3n+1)\}\\
&=\frac{n^2}{10}(10n^2+2)-\frac{n}{30}\cdot 6n\\
&=n^4
\end{aligned}
$$

これより $S_4(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4=T_4(1)+\sum_{k=2}^{n}\{T_4(k)-T_4(k-1)\}=T_4(n)$ が証明された．

別解

$f(x)$ が N $(N\geqq 2)$ 次の多項式の場合 $f(x)-f(x-1)$ は $N-1$ 次の多項式である．これより $S_k(n)$ を $k+1$ 次の多項式として構成可能であることが分かる．$S_k(n)$ の定義より $S_k(n)-S_k(n-1)=n^k$ が 2 以上のすべての自然数 n に対して成り立つが，N 次方程式の解は高々 N 個なのでこの式は恒等式でなければならない．つまり $S_k(x)-S_k(x-1)=x^k$ がすべての実数 x について成り立つ，

以下では $k=4$ に限定して話を進めるので $S(x)=S_4(x)$ とおく．$S(x)-S(x-1)=x^4$ $\cdots$① が成り立っている．$S(1)=1^4=1$ である．

① に $x=1$ を代入して $S(0)=0$ を得る．

① に $x=0$ を代入して $S(-1)=S(0)-0^4=0$ を得る．

① に $x=-1$ を代入して $S(-2)=S(-1)-(-1)^4=-1^4$ を得る．

① に $x=-2$ を代入して $S(-3)=S(-2)-(-2)^4=-1^4-2^4$ を得る．

これを繰り返すと $S(-n-1)=-1^4-2^4-\cdots-n^4$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ であることが分かる．つまりすべての自然数 n に対して $S(-n-1)=-S(n)$ が成り立つ，

先ほどと同様に「多項式 $=$ 多項式」が無限個の解をもつので $S(-x-1)=-S(x)$ は恒等式である．この式に $x=-\dfrac{1}{2}$ を代入すると $S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ が分かる．

$S(0)=S(-1)=S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ より $S(x)$ は $x(x+1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ で割り切れる，割った商は 2 次式である．そこで $S(x)=x(x+1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)q(x)\quad(q(x)=sx(x+1)+tx+u)$ $\cdots$② とおく．

x に $-x-1$ を代入すると $S(-x-1)=(-x-1)(-x)\left(-x-\dfrac{1}{2}\right)q(-x-1)$ となるが $S(-x-1)=-S(x)$ だったから $q(-x-1)=q(x)$ でなければならない．$q(-x-1)=s(-x-1)(-x)+t(-x-1)+u$ であるから $t=0$ が導かれる．($q(x)$ は $x=-\dfrac{1}{2}$ を対称軸に持つ二次関数だということである．)

以上によって $S_4(x)=S_2(x)\{aS_1(x)+b\}$ と書けることが示された．

$\boxed{\text{補足}}$

同様の議論により $S_{2k}(n) = S_2(n)g\left(S_1(n)\right)$ となる $k-1$ 次多項式 $g(x)$ の存在することが証明できる．また $S_{2k-1}(n) = S_1(n)g\left(S_1(n)\right)$ となる $k-1$ 次多項式 $g(x)$ の存在することが証明できる．これに関連する問題が 2006 年の東京大学後期試験で出題されている．

講評

問題 1［小問集合］（やや易〜標準）

昨年同様，マーク形式の 10 問．典型的で解きやすい問題が多く，昨年よりやや易化した．

問題 2［円の通過領域］（標準）

(1) では，文字定数 t についての 1 次式が実数解をもつ条件を考えればよい．この手の問題では t の 2 次式となる設定が多いため，1 次式となる本問では，方針の本質がよく分かっていないと混乱したかも知れない．(1) が突破できれば，(2) の面積は易しい．(3) の体積は，円の方程式を上下半分ずつに分けての立式となるが，ここは日頃の演習量が効いてくるだろう．計算については，等積移動に気付けば比較的簡潔に処理可能である．

問題 3［数列の和公式，証明］（標準〜難）

よく知られているシグマ公式であるが，いざ証明せよと言われて面くらったかもしれない．数学的帰納法を使うか，階差を取るのが楽だろう．もちろん実際に作り上げてしまうという手も考えられる．しかし (3) の $S_4(n)$ は実際に作り上げるのは難しいであろう．必要条件として小さい n での成立から a, b を求めてしまい，決定された右辺が実際に $S_4(n)$ になることを示すという方法に気付くかどうかが分かれ目である．なお別解の様に $S_4(x)$ が $(-\frac{1}{2},\ 0)$ に関して点対称だという事実からも証明できるが，一般的過ぎて難しいだろう．

総評

出題形式はここ何年かと同様だが，難易度は問題 1, 2, 3 ともに昨年度までよりやや易化している．問題 2, 3 については，昨年度までは序盤でどう方針を立てるかで躓く生徒が多そうな出題であったが，その点については 2 問とも比較的穏やかになった．問題 2, 3 ともに (2) までは何とか正解を導きたいところである．(ただし問題 3 の (3) は非常に難しい)　目標点は 60%.