医学部進学予備校
メビオ

解答速報

大阪医科大学（後期） 数学

2019年3月10日実施

〔1〕

(1) 複素数 z が $|z|=1$，$z \neq 1$，$z \neq -1$ を満たすとき，$\dfrac{z+1}{z-1}$ は純虚数であることを示せ。

(2) 複素数 α，β が $\alpha \neq \beta$ を満たすとする。$\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ が純虚数であるような複素数 z は一つの円上にあることを示し，その円の中心と半径を求めよ。

解答

(1) $z \neq -1$ より $\dfrac{z+1}{z-1} \neq 0$.

$|z|=1$ より $|z|^2 = z\overline{z} = 1 \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

また

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} &= \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} \\ &= \frac{1/z+1}{1/z-1} \quad (\because \overline{z} = 1/z) \\ &= -\frac{z+1}{z-1}\end{aligned}$$

となるので，$\dfrac{z+1}{z-1}$ は純虚数である．　（証明終）

(2) $z \neq \alpha$，$z \neq \beta$ であり，$\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ が純虚数なので，

$$\begin{aligned}&\overline{\left(\frac{z-\beta}{z-\alpha}\right)} = -\frac{z-\beta}{z-\alpha} \\ \iff\ &\frac{\overline{z}-\overline{\beta}}{\overline{z}-\overline{\alpha}} = -\frac{z-\beta}{z-\alpha} \\ \iff\ &2z\overline{z} - (\overline{\alpha}+\overline{\beta})z - (\alpha+\beta)\overline{z} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = 0 \\ \iff\ &z\overline{z} - \frac{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}{2}z - \frac{\alpha+\beta}{2}\overline{z} + \frac{\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta}{2} = 0 \\ \iff\ &\left(z - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\overline{z} - \frac{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}{2}\right) \\ &\quad = \frac{(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})}{4} - \frac{\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta}{2} \\ \iff\ &\left|z - \frac{\alpha+\beta}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})\end{aligned}$$

$$\iff \left|z-\frac{\alpha+\beta}{2}\right|=\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|$$

これは z が，中心 $\boldsymbol{\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$，半径 $\boldsymbol{\left|\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right|}$ の円周上（ただし α，β を除く）にあることを示す．

別解

P(z)，A(α)，B(β) とおくと題意より $\arg\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}=\pm\dfrac{\pi}{2} \iff$ AP $\perp$ BP であり，点 P は AB を直径の両端とする円周上を動く（ただし P $\neq$ A, B）．その中心は $\boldsymbol{\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$ であり，半径は $\boldsymbol{\left|\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right|}$ である．

的中!!

大阪医科大学後期直前授業（3/6 実施）

異なる複素数 α, β に対して，$\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ が純虚数となるような z は，複素数平面上でどのような図形を描くか．

〔2〕 1から6までの番号をつけた6枚のカードから同時に4枚取り出し，大きさの順にならべて，X_1，X_2，X_3，X_4 $(X_1 < X_2 < X_3 < X_4)$ とする。$A = X_4 - X_1$，$B = X_3 - X_2$ とおく。

(1) 起こりうる $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4)$ の総数を求めよ。

(2) 起こりうる $(A,\ B)$ の総数を求めよ。

(3) 確率が最大となる $(A,\ B)$ とその確率を求めよ。

解答

(1) 1から6の中から異なる4つの数を選ぶ選び方となるので，${}_6\mathrm{C}_4 = \mathbf{15}$ **通り**.

(2) 15通りを列挙すると以下の通りである.

X_1	X_2	X_3	X_4	$(A,\ B)$
1	2	3	4	(3, 1)
1	2	3	5	(4, 1)
1	2	3	6	(5, 1)
1	2	4	5	(4, 2)
1	2	4	6	(5, 2)
1	2	5	6	(5, 3)
1	3	4	5	(4, 1)
1	3	4	6	(5, 1)
1	3	5	6	(5, 2)
1	4	5	6	(5, 1)
2	3	4	5	(3, 1)
2	3	4	6	(4, 1)
2	3	5	6	(4, 2)
2	4	5	6	(4, 1)
3	4	5	6	(3, 1)

よって，

$(A,\ B)$	場合の数
(3, 1)	3通り
(4, 1)	4通り
(5, 1)	3通り
(4, 2)	2通り
(5, 2)	2通り
(5, 3)	1通り
計	15通り

となるので，**6 通り**.

(3) (2)の表より，$\boldsymbol{(A,\ B) = (4,\ 1)}$ **のとき，** $\boldsymbol{\dfrac{4}{15}}$.

〔3〕 中心が点 O，半径が 1 の球面 S と，O からの距離が t $(0<t<1)$ の平面 α がある。α と S の共通部分の円 T 上に異なる 3 点 A, B, C を，線分の長さが $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=1$ をみたすようにとり，T の半径を u とする。

(1) このような 3 点 A, B, C がとれるような t の範囲を求めよ。

(2) $\angle\mathrm{ABC}=2\theta$ とするとき，$\sin\theta$ を u を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を u を用いて表せ。

(4) 四面体 OABC の体積が最大になるような u の値と，そのときの体積を求めよ。

解答

(1) 点 O から平面 α に下ろした垂線の足を H とすると，$\mathrm{OH}=t$ より円 T の半径 u は $u=\sqrt{1-t^2}$ である．題意を満たすような円上の異なる 3 点 A, B, C が存在するためには $\mathrm{AB}(=\mathrm{BC})$ の長さが円 T の直径より小さければよいので，$1<2\sqrt{1-t^2}$ および $0<t<1$ より $\boldsymbol{0<t<\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ である．

(2) H から辺 AB に下ろした垂線の足を I とすると，$\mathrm{BI}=u\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ より $\cos\theta=\dfrac{1}{2u}$ であるから，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\boldsymbol{\sqrt{1-\dfrac{1}{4u^2}}}$ である．

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 2\theta=\sin\theta\cos\theta\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2u}\sqrt{1-\frac{1}{4u^2}}}\end{aligned}$$

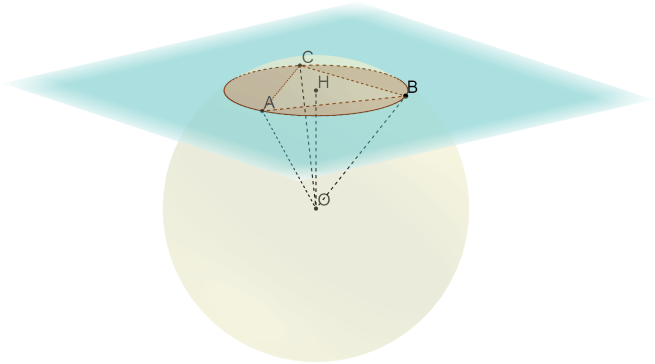
(4) 四面体 OABC の体積は，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\cdot\mathrm{OH}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\\&=\frac{1}{3}\cdot t\cdot\frac{1}{2u}\sqrt{1-\frac{1}{4u^2}}\\&=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{1-u^2}}{2u}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4u^2}}\\&=\frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{1}{u^2}-1\right)\left(4-\frac{1}{u^2}\right)}\cdots①\end{aligned}$$

である．ここで，$\dfrac{1}{u^2}=s$ とおくと，$s=\dfrac{1}{u^2}=\dfrac{1}{1-t^2}$ および $0<t<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $1<s<4$ がわかり，

$$\begin{aligned}①&=\frac{1}{12}\sqrt{(s-1)(4-s)}\\&=\frac{1}{12}\sqrt{-\left(s-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}\end{aligned}$$

となるので，体積の最大値は $s=\dfrac{5}{2}$ すなわち $u=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{5}}$ のとき $\dfrac{1}{12}\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$ である．


C
H
B
A
O

〔4〕 n を自然数，π を円周率として，次のようにおく：

$$f_n(x) = (1-x)^n - x^n,\ a_n = \int_0^1 (1-x)^n \cos \pi x\, dx$$

(1) $n \geqq 1$ のとき，$0 < x < \dfrac{1}{2}$ において $f_n(x) > 0$ であることを示せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，$0 < x < \dfrac{1}{2}$ において $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ であることを示せ。

(3) $n \geqq 1$ のとき，a_{n+1} と a_n の大小を調べよ。

解答

(1) $0 < x < \dfrac{1}{2}$ のとき $0 < x < 1-x$ であるから $n \geqq 1$ のとき $0 < x^n < (1-x)^n$ である．従って $f_n(x) = (1-x)^n - x^n > 0$ が成り立つ．　(証明終)

(2) $0 < x < \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}
&f_n(x) - f_{n+1}(x) \\
&= \{(1-x)^n - x^n\} - \{(1-x)^{n+1} - x^{n+1}\} \\
&= (1-x)^n\{1-(1-x)\} - x^n(1-x) \\
&= x(1-x)\{(1-x)^{n-1} - x^{n-1}\} \\
&= x(1-x)f_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

であるが $n \geqq 2$ のとき (1) より $f_{n-1}(x) > 0$ であるから $f_n(x) > f_{n+1}(x)$ が証明された．　(証明終)

(3) 区間 $\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]$ において

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^n \cos \pi x\, dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^0 t^n \cos\{\pi(1-t)\}\,(-dt) \\
&\qquad (1-x=t \text{ と置換した}) \\
&= -\int_0^{\frac{1}{2}} t^n \cos \pi t\, dt \\
&= -\int_0^{\frac{1}{2}} x^n \cos \pi x\, dx
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 (1-x)^n \cos \pi x\, dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)^n \cos \pi x\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^n \cos \pi x\, dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)^n \cos \pi x\, dx - \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \cos \pi x\, dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \{(1-x)^n - x^n\} \cos \pi x\, dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x) \cos \pi x\, dx
\end{aligned}$$

これを使うと

$$a_n - a_{n+1} = \int_0^{\frac{1}{2}} \{f_n(x) - f_{n+1}(x)\} \cos \pi x \, dx$$

が得られる．

(i)　$n \geqq 2$ のとき

$0 < x < \dfrac{1}{2}$ においては $f_n(x) - f_{n+1}(x) > 0$ かつ $\cos \pi x > 0$ であるから $a_n - a_{n+1} > 0$ つまり $a_{n+1} < a_n$ である．

(ii)　$n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_{n+1}(x) &= f_1(x) - f_2(x) \\ &= \{(1-x) - x\} - \{(1-x)^2 - x^2\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから，$a_n - a_{n+1} = 0$ つまり $a_{n+1} = a_n$ である．

以上から，

$$\begin{cases} \boldsymbol{n \geqq 2 \text{ のとき} \quad a_{n+1} < a_n} \\ \boldsymbol{n = 1 \text{ のとき} \quad a_{n+1} = a_n} \end{cases}$$

〔5〕 関数 $f(x)=\dfrac{\frac{1}{2}+x}{1+x^2}$ を考える。

(1) 方程式 $f(x)=x$ の実数解を求めよ。

(2) $\dfrac{3}{4}\leqq x<y\leqq 1$ のとき次の不等式を示せ。

$$0<f(x)-f(y)<\frac{1}{2}(y-x)$$

(3) $x_1=1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ とおく。このとき，$\dfrac{3}{4}\leqq x_n\leqq 1$ であることを示せ。

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

解答

(1) $f(x)=x \iff x^3-\dfrac{1}{2}=0 \iff \boldsymbol{x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}}$

(2) $f'(x)=\dfrac{-x^2-x+1}{(1+x^2)^2}=0$ より $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ を得る．$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<\dfrac{3}{4}$ を考慮すると，

$\dfrac{3}{4}\leqq x\leqq 1$ での $f(x)$ の増減は以下の通りとなる．

x	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{4}{5}$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$

従って $f(x)$ は (狭義) 単調減少であり，$x<y$ なので，$0<f(x)-f(y)$ が成り立つ．

また，$f(x)-f(y)<\dfrac{1}{2}(y-x)$ を同値変形すると $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}>-\dfrac{1}{2}$ となる．これを示す．$f(x)$ は $\dfrac{3}{4}\leqq x\leqq 1$ において微分可能なので，平均値の定理から，

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(c)\ (x<c<y)$$

を満たす c が少なくとも一つ存在する．

$$f''(x)=\frac{2x^3+3x^2-6x-1}{(1+x^2)^3}$$

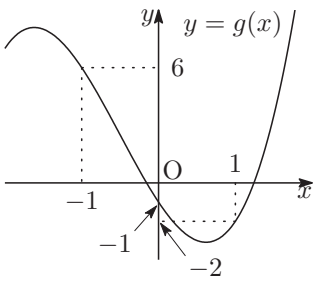
であり，この分子を

$$g(x)=2x^3+3x^2-6x-1$$

とおくと，$g(x)$ は 3 次関数であり，

$$g(-1)=6>0,\ g(0)=-1<0,\ g(1)=-2<0$$

であることからグラフは下図のようになる．



これより $\dfrac{3}{4} \leqq x \leqq 1$ で $g(x) < 0$，すなわち $f''(x) < 0$ であることが分かる．従って $f'(x)$ は単調減少であるので，

$$f'(c) \geqq f'(1) = -\frac{1}{4} > -\frac{1}{2}$$

である．これより $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} > -\dfrac{1}{2}$ すなわち $f(x)-f(y) < \dfrac{1}{2}(y-x)$ がいえる．

以上から，

$$0 < f(x) - f(y) < \frac{1}{2}(y-x)$$

が示された．　(証明終)

別解

$$f(x) - f(y) = \frac{(y-x)(2xy+x+y-2)}{2(x^2+1)(y^2+1)}$$

であり，$y > x \geqq \dfrac{3}{4}$ より $2xy+x+y-2 > 2 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4} - 2 = \dfrac{5}{8} > 0$ であることから，$f(x) - f(y) > 0$.

また，

$$f(x) - f(y) - \frac{1}{2}(y-x) = -\frac{(y-x)(x^2y^2-2xy+x^2-x+y^2-y+3)}{2(x^2+1)(y^2+1)}$$

であり，$y > x$, $x^2y^2-2xy+x^2-x+y^2-y+3 = (xy-1)^2 + \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2} > 0$ なので，$f(x) - f(y) < \dfrac{1}{2}(y-x)$.

以上から，

$$0 < f(x) - f(y) < \frac{1}{2}(y-x)$$

が示された．　(証明終)

(3)　数学的帰納法で示す．

(i)　$n = 1$ のときは $x_1 = 1$ より成り立つ．

(ii)　$n = k$ のとき $\dfrac{3}{4} \leqq x_k \leqq 1$ が成り立つと仮定すると，(2) での $f(x)$ の増減から，

$$\frac{3}{4} \leqq x_{k+1} \leqq \frac{4}{5} \leqq 1$$

が成り立つことが分かる．従って $n = k+1$ のときも成り立つ．

以上 (i)(ii) から，$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ で $\dfrac{3}{4} \leqq x_n \leqq 1$ が成り立つ．　(証明終)

(4)　$\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ とすると $f(\alpha) = \alpha$ が成り立ち，$\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{27}{64} < \alpha^3 = \dfrac{1}{2} < 1$ より $\dfrac{3}{4} \leqq \alpha \leqq 1$ である．また (3) より $\dfrac{3}{4} \leqq x_n \leqq 1$ である．以上を考慮すると (2) より以下の不等式を得る．

$$\begin{aligned} 0 \leqq |x_n - \alpha| &= |f(x_{n-1}) - f(\alpha)| \\ &\leqq \frac{1}{2}|x_{n-1} - \alpha| \\ &\leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |x_{n-2} - \alpha| \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - \alpha|$$

すなわち $0 \leqq |x_n - \alpha| \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - \alpha|$ が分かる．$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - \alpha| = 0$ であるから，はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} |x_n - \alpha| = 0$，すなわち $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$ である．

講評

〔1〕［複素数］（やや易）実数条件，純虚数条件は複素数の典型問題である．除外点などに注意を払いつつ，いつも通り式変形していけばよい．

〔2〕［確率］（易）数え上げても 15 通りしかないとすぐにわかるので，抽象的な議論を必要とせず解決してしまう．この問題は落とせない．

〔3〕［空間図形］（標準）素直に誘導に乗っていけば難しくはないが，(4) の最大値を求める際，計算の仕方によっては作業量が大きく違ってしまう．要領の良し悪しが得点に影響しそうである．

〔4〕［数Ⅲ積分］（やや難）被積分関数の大小が積分値に反映するという定石の問題．積分区間を半分に分けて一方を反転することに気付くかどうかがポイント．

〔5〕［数列の極限］（やや難）一般項の求まらない漸化式で表された数列について，その極限を求める問題（いわゆる縮小写像の問題）．(2) で平均値の定理を利用するところがやや難しいが，そこが突破できなくても (3) 以降に手を付けたかどうかが得点を左右しそう．

難易度は昨年度よりやや易化しているが，全体として実力がしっかり反映される出題になっている．後期試験ということも考えると目標は 75%．

医学部進学予備校 メビオ
〒540-0033 大阪市中央区石町2-3-12 ベルヴォア天満橋
0120-146-156
https://www.mebio.co.jp/
MeBio Scholastics