医学部進学予備校
メビオ

解答速報

大阪医科大学（前期）数学

2019年2月11日実施

〔1〕 $\triangle$ABC は，3 辺の長さ BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ が整数で $\angle$BAC $= \dfrac{\pi}{3}$ を満たすとする。

(1) $ab = 21$ を満たすような $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

(2) $a + b + c = \dfrac{bc}{2}$ を満たすような $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

解答

(1) a，b，c は整数とあるが，辺の長さなので自然数である．余弦定理より

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\frac{\pi}{3} \iff c^2 - bc + b^2 - a^2 = 0 \ \cdots\cdots \text{①}$$

これを c の 2 次方程式と見て，実数解を持つことから判別式より，

$$D = b^2 - 4(b^2 - a^2) = 4a^2 - 3b^2 \geqq 0 \ \cdots\cdots \text{②}$$

$ab = 21$ を満たす自然数のうち ② を満たすものは $(a,\ b) = (7,\ 3),\ (21,\ 1)$ である．

(i) $(a,\ b) = (7,\ 3)$ のとき，$c^2 - 3c - 40 = 0$ を解いて $c = 8$.

(ii) $(a,\ b) = (21,\ 1)$ のとき，$c^2 - c - 440 = 0$ は自然数解を持たない．

したがって，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (7,\ 3,\ 8)}$ である．

(2)

$$\begin{aligned}
\text{①} &\iff a^2 - (b-c)^2 = bc \\
&\iff (a+b-c)(a-b+c) = bc \\
&\iff \left(\frac{bc}{2} - 2c\right)\left(\frac{bc}{2} - 2b\right) = bc \\
&\iff \frac{bc}{4}(b-4)(c-4) = bc \\
&\iff bc(b-4)(c-4) = 4bc
\end{aligned}$$

b，c は自然数なのでともに 0 ではないので，両辺を bc で割ると，

$$(b-4)(c-4) = 4$$

である．これを満たすものは，$b - 4 \geqq -3$，$c - 4 \geqq -3$ を考慮すると，

$$(b-4,\ c-4) = (-2,\ -2),\ (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$$

より $(b,\ c) = (2,\ 2),\ (5,\ 8),\ (6,\ 6),\ (8,\ 5)$ である．ただし $(b,\ c) = (2,\ 2)$ のとき，a が負となるので不適であるので，題意を満たす組をすべて挙げると，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (7,\ 5,\ 8),\ (6,\ 6,\ 6),\ (7,\ 8,\ 5)}$ である．

〔2〕

(1)　$t \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{t^2}{2} < e^t$ を示せ。

(2)　実数 c に対して，直線 $y = c$ と関数 $y = (x^2 - 1)e^{-x^2}$ のグラフとの共有点の個数を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　$f(t) = e^t - \dfrac{t^2}{2}$ とおく．

$f'(t) = e^t - t$，$f''(t) = e^t - 1$ より，$t \geqq 0$ において $f''(t) \geqq 0$ であるから，$f'(t)$ は単調増加であり，$f'(0) = 1 > 0$ と合わせて $f'(t) > 0$ がわかる．すなわち，$f(t)$ は単調増加である．

ここで，$f(0) = 1 > 0$ であるから，$t \geqq 0$ において $f(t) > 0$，すなわち $\dfrac{t^2}{2} < e^t$ が示された．　（証明終）

(2)　$y = (x^2 - 1)e^{-x^2}$ において，$x^2 = t$ とおくと $t \geqq 0$ であり，$y = \dfrac{t-1}{e^t}$ である．ここで $t > 0$ においては (1) より

$$\frac{t^2}{2} < e^t \iff \frac{2}{t^2} > \frac{1}{e^t} \cdots ①$$

が成り立っている．x の絶対値が十分大きいときは t も十分大きいので，このとき ① より

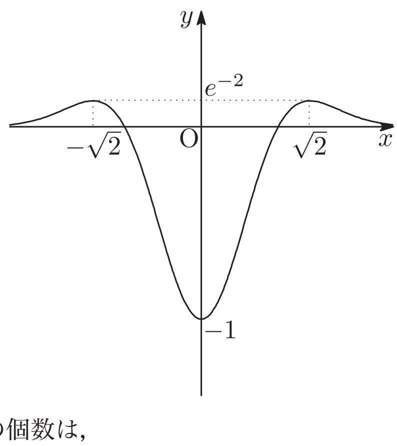
$$\frac{2(t-1)}{t^2} > \frac{t-1}{e^t} > 0$$

が成り立つ．ここで，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{2(t-1)}{t^2} = 0$ であるから，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{t-1}{e^t} = 0$ がわかる．すなわち $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} (x^2 - 1)e^{-x^2} = 0 \cdots ②$ である．

また，$y' = -2x(x^2 - 2)e^{-x^2}$ より $y' = 0 \iff x = 0,\ \pm\sqrt{2}$ であるから，② も考慮すると $y = (x^2 - 1)e^{-x^2}$ の増減は次のようになる．

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	∞
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	-1	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	0

したがって，この関数のグラフは次の通り．



以上により，直線 $y = c$ との共有点の個数は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{c < -1,\ c > e^{-2}} \textbf{ のとき} & \textbf{なし} \\ \boldsymbol{c = -1} \textbf{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{-1 < c \leqq 0,\ c = e^{-2}} \textbf{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{0 < c < e^{-2}} \textbf{ のとき} & \textbf{4 個} \end{cases}$$

〔3〕 さいころを 4 回投げて出た目をそれぞれ Z_1，Z'_1，Z_2，Z'_2 とし，X_i $(i=1,\ 2)$ を次のように定義する。

$$X_i = \begin{cases} Z_i & (Z_i \geqq 4 \text{ のとき}) \\ Z_i + Z'_i & (Z_i \leqq 3,\ Z_i + Z'_i \leqq 6 \text{ のとき}) \\ 6 & (Z_i \leqq 3,\ Z_i + Z'_i > 6 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) X_1 がとりうる値とそれぞれの確率を求めよ。

(2) $Z_1 = 1$ のとき，$X_1 + X_2 = 6$ である条件付き確率を求めよ。

(3) $X_1 + X_2 = 6$ のとき， $Z_1 = 1$ である条件付き確率を求めよ。

解答

(1) $Z_1,\ Z'_1$ に対する X_1 の値は次の表のようになっている.

$Z_1 \backslash Z'_1$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	6
2	3	4	5	6	6	6
3	4	5	6	6	6	6
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6

これより X_1 の取り得る値およびその確率は次の通り.

x_1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_1)$	$\dfrac{1}{36}$	$\dfrac{1}{18}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{5}{12}$

(2) $Z_1 = 1$ であるという事象を A, $X_1 + X_2 = 6$ であるという事象を B で表す. $P(A) = \dfrac{1}{6}$ である.

B は

$$B_1 : (X_1,\ X_2) = (2,\ 4)$$
$$B_2 : (X_1,\ X_2) = (3,\ 3)$$
$$B_3 : (X_1,\ X_2) = (4,\ 2)$$

の 3 つの事象に分割されるので

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) \\ &= \frac{1}{36} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{18} \times \frac{1}{18} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{11}{648} \end{aligned}$$

$P(A \cap B)$ についてであるが，次の 3 つの事象を考える.

$$C_2 : Z_1 = 1 \text{ かつ } X_1 = 2 \quad (\text{つまり } Z_1 = 1 \text{ かつ } Z'_1 = 1)$$
$$C_3 : Z_1 = 1 \text{ かつ } X_1 = 3 \quad (\text{つまり } Z_1 = 1 \text{ かつ } Z'_1 = 2)$$
$$C_4 : Z_1 = 1 \text{ かつ } X_1 = 4 \quad (\text{つまり } Z_1 = 1 \text{ かつ } Z'_1 = 3)$$

すると

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(C_2 \cap B_1) + P(C_3 \cap B_2) + P(C_4 \cap B_3) \\ &= \frac{1}{36} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{36} \times \frac{1}{18} + \frac{1}{36} \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{108} \end{aligned}$$

求める確率は $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}}$.

(3)　(2) より求める確率は $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{11}}$.

〔4〕

(1)　A，O を $\mathrm{AO}=1$ を満たす平面の定点とし，C を O を中心とする半径 a $(a<1)$ の円とする。点 P が，

　条件：線分 AP と円 C との共有点が P のみである

を満たすように C 上を動くとき，線分 AP の長さの最大値と最小値を求めよ。

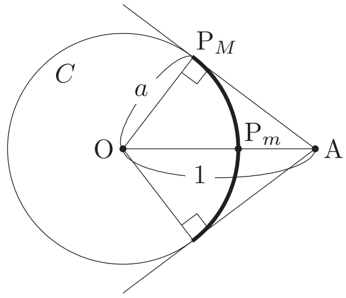
(2)　A，O を $\mathrm{AO}=1$ を満たす空間の定点とし，S を O を中心とする半径 a $(a<1)$ の球面とする。S 上の点 P で，

　条件：線分 AP と球面 S との共有点が P のみである

を満たすものを考えて，すべての P に対する線分 AP の和集合を K とする。K の体積 V を求めよ。

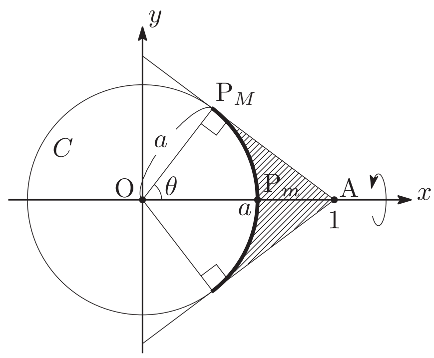
解答

(1)　P がとり得る点の集合は右図の太線部分である．従って線分 AP の長さの最大値は $\mathrm{AP}_M=\boldsymbol{\sqrt{1-a^2}}$，最小値は $\mathrm{AP}_m=\boldsymbol{1-a}$.



(2)　題意の K は，右図の斜線部を x 軸の周りに 1 回転してできる立体である．右図において円の方程式は $x^2+y^2=a^2$，また

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OP}_M}{\mathrm{OA}}=a,\quad \sin\theta=\frac{\mathrm{AP}_M}{\mathrm{OA}}=\sqrt{1-a^2}$$



であるから，P_M の座標は

$$(a\cos\theta,\ a\sin\theta)=\left(a^2,\ a\sqrt{1-a^2}\right)$$

である．従って，

$$V=\underline{(\text{円錐})}_{①}-\underline{\int_{a^2}^{a}\pi y^2dx}_{②}$$

であり，

$$\begin{aligned}①&=\frac{1}{3}\cdot\pi\left(a\sqrt{1-a^2}\right)^2\left(1-a^2\right)\\&=\frac{\pi}{3}\left(a^2-2a^4+a^6\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}②&=\int_{a^2}^{a}\pi(a^2-x^2)dx\\&=\pi\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{a^2}^{a}\\&=\frac{\pi}{3}\left(2a^3-3a^4+a^6\right)\end{aligned}$$

$$\therefore V=①-②=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}a^2(1-a)^2}$$

〔5〕 i を虚数単位とし，複素数 z に対し，$\overline{z}$，$\arg z$ をそれぞれ z の複素共役，偏角とする。

(1) $|w_1| = |w_2| = 1$ である複素数 w_1，w_2 に対し $\theta = \arg \dfrac{w_1}{w_2}$ とするとき，$|w_1 - w_2| = 2\left|\sin \dfrac{\theta}{2}\right|$ を示せ。

(2) $\alpha = -1$, $\beta = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\gamma = \overline{\beta}$ とする。複素数 z が $|z| = 1$ を満たすように動くとき, $|z-\alpha|+|z-\beta|+|z-\gamma|$ の最大値と最小値を求めよ。

解答

(1) $w_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$, $w_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$ とする.

$$\begin{aligned}
w_1 - w_2 &= (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + i(\sin\theta_1 - \sin\theta_2) \\
&= \left(-2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) + i\left(2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) \\
&= 2i\cdot\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \frac{1}{i}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \\
&= 2i\cdot\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore |w_1 - w_2| = |2i|\cdot\left|\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right|\cdot 1 = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| \quad \text{（証明終）}$$

(2) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とする.

このとき，α, β, γ の 3 点によってできる三角形は実軸に関して対称な正三角形なので，その対称性を考慮して $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ としても一般性は損なわれない.

$\arg\alpha = \pi$, $\arg\beta = \dfrac{\pi}{3}$, $\arg\gamma = -\dfrac{\pi}{3}$ なので (1) の結果を使って

$$\begin{aligned}
|z-\alpha| + |z-\beta| + |z-\gamma| &= 2\left|\sin\frac{\theta-\pi}{2}\right| + 2\left|\sin\frac{\theta-\frac{\pi}{3}}{2}\right| + 2\left|\sin\frac{\theta+\frac{\pi}{3}}{2}\right| \\
&= 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| + 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right| + 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right| \\
&= 2\cos\frac{\theta}{2} - 2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6}\right) + 2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right) \\
&\quad \left(\because 0 \leqq \frac{\theta}{2} \leqq \frac{\pi}{6},\ -\frac{\pi}{6} \leqq \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6} \leqq 0,\ \frac{\pi}{6} \leqq \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6} \leqq \frac{\pi}{3}\right) \\
&= 2\cos\frac{\theta}{2} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 4\cos\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

$0 \leqq \dfrac{\theta}{2} \leqq \dfrac{\pi}{6}$ より $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\dfrac{\theta}{2} \leqq 1$ なので，**最大値は 4, 最小値は $2\sqrt{3}$.**

講評

〔1〕［整数問題］（やや難）図形的な意味を考えると却って解きにくくなってしまう．余弦定理を用いて条件式を作ってしまえば単純な整数問題に帰着できる．

〔2〕［数Ⅲ微分］（標準）(1) は典型的な不等式の証明．(2) も方程式の解の個数を数えさせる典型題だが，しっかりとした議論が必要になる．

〔3〕［確率］（やや難）X_i に対する条件の書き方が抽象的で捉えづらい（内容自体は難しくない）．(2) と (3) の違いもしっかり読み取りたいところ．

〔4〕［数Ⅲ積分］（標準）「どのような図形を扱っているか」が理解できれば，計算自体は易しい．

〔5〕［複素数］（標準）複素数の範囲の問題だが，内容は「平面図形」．(1) は感覚的になりすぎないように，(2) は議論の仕方に注意したいところ．

昨年に比べて難化した．いわゆる「典型的な表現」が少なく，「問題文の意味するところ」を理解すること自体が難しい．内容もバラエティーに富んでおり，総合的な数学力が試されるセットとなっている．

目標は 60%